

УДК 681.3:622.276

ОПТИМАЛЬНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАНИХ КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ СИГНАЛІВ

Н.Г. Ширмовська

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська 15, м. Івано-Франківськ, 76019, тел. (8-03422) 50-45-21

Приведена оцінка надмірності представлення інформації, яка задана за допомогою кореляційної функції. Запропонований спосіб аналітичного визначення оптимального кроку дискретизації вимірювальної інформації. Розглянутий ефект апертурної помилки і вимоги до тремтіння фронту сигналу синхронізації, а також питання передискретизації.

Приведена оценка избыточности представления информации, которая задана с помощью корреляционной функции. Предложен способ аналитического определения оптимального шага дискретизации измерительной информации. Рассмотрен эффект апертурной ошибки и требования к дрожанию фронта сигнала синхронизации, а также вопросы передискретизации.

The estimation of surplus of presentation of information, set by a correlation function is conducted. The method of analytical determination of optimum step of diskretization of measuring information is offered. The effect of aperture error and requirement to shaking of front of signal of synchronization, and also questions of perediskretization, is considered.

Наявність надлишкової інформації небажане тому, що канал зв'язку зайнятий на більш довгий час, ніж необхідно, або ж потрібні канали із більшою пропускнуою здатністю. При зберіганні надлишкової інформації збільшується необхідний об'єм пам'яті, зростає час пошуку та зчитування даних, а при обробці даних зростає час обробки.

Методи дискретизації та відновлення неперервних функцій відрізняються по таких ознаках, як: регулярність відліків, критерій вибору відліків, оцінка точності відновлення, спосіб відновлення, вид функції відновлення.

Регулярність розміщення відліків в часі зумовлює ступінь усунення надлишковості та складність пристроїв дискретизації і відновлення. При рівномірній дискретизації інтервал між відліками фіксований та вибирається на основі апріорних відомостей про характер сигналу. При нерівномірній дискретизації інтервал між відліками змінюється із врахуванням зміни характеристик повідомлення.

Якість способу дискретизації, згідно якого відбираються відліки, слід оцінювати за похибкою, з якою вдається відновити вихідну функцію. Критеріями, в яких похибка відновлення сигналу наближується до нуля, є такі:

- частотний критерій В.А. Котельникова, в якому інтервали між відліками вибирають з урахуванням частотного спектра сигналу, що підлягає дискретизації;

- кореляційний критерій Н.А. Железнова, що встановлює зв'язок інтервалів між відліками з інтервалом кореляції сигналу;

- квантовий критерій Ф.Е. Темнікова, що вказує на залежність інтервалів між відліками за ступенем квантування за рівнем та крутизною (першої похідної) сигналу.

Частіше за все для оцінки відхилення функції $Y(t)$, що відтворюється, від вихідного сигналу $X(t)$ на кожному інтервалі дискретизації $[0, t]$ використовують такі критерії: критерій найбільшого відхилення, середньоквадратичний, інтегральний, ймовірносно-зональний. Як правило, неперервні функції не можуть мати обмежений спектр, тому для сигналів обмеженої протяжності теорема Котельникова не може бути застосована. Критерій Железнова, що вводить поняття про середні характеристики сигналу, обмежує кінцеву точність відновлення функції структурою кореляційної функції та відношенням $t(ocp)/t$. Квантовий критерій Темнікова зводить похибку відновлення вихідної неперервної функції з обмеженими похідними поліномами Лагранжа до залишкового члена.

У більшості практичних випадків оптимальна обробка сигналів є ускладненою, це потребує розроблення методів оцінки точності представлення даних. Оптимальною будемо називати дискретизацію, в процесі якої вихідна функція із заданою точністю може бути представлена мінімальною кількістю відліків $X(t)$. В цьому випадку всі відліки є суттєвими для відновлення вихідної інформації. Розглянемо дискретизацію випадкових стаціонарних сигналів та синтез розкладу на основі узагальненого ряду Фур'є. Вважатимемо, що кореляційна функція випадкового сигналу $R(t)$ відома, а ефективний інтервал кореляції $\tau_0 \ll T$, де $[0, T]$ – час існування реалізації сигналу. Як критерій вірності v використаємо функціонал [1]:

$$v = \frac{1}{T} \int_0^T M\{\Delta^2(t)\} dt, \quad (1)$$

де $\Delta(t) = f(t) - f_N(t)$ – похибка при заміні сигналу $f(t)$ функцією розкладу $f_N(t)$; $M\{\Delta^2(t)\}$ – математичне очікування квадрату похибки зміни сигналу.

Будемо вважати, що функція $f(t)$ інтегрується разом із своїм квадратом на інтервалі $[0, T]$. Мінімум середньої квадратичної похибки при обмеженому числі членів розкладу $N = T/\tau$ (τ – інтервал дискретизації) досягнутий у випадку представлення функції $f(t)$ відрізком ряду Фур'є в системі ортогональних функцій $\{\varphi_k(t)\}$:

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k(t), \quad (2)$$

де a_k – черговий коефіцієнт розкладу в ряд Фур'є ортогональних функцій.

Без втрати сутності можна вважати, що математичне очікування сигналу $M\{f(t)\} = 0$, а його норма $|f(t)| = 1$. Підставляючи (2) в (1), отримаємо:

$$v = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi(t) \int_0^{\tau} \varphi(x) R(t, x) dx dt + \int_0^{\tau} \varphi^2(t) \int_0^{\tau} \varphi(x) \int_0^{\tau} \varphi(y) R(x, y) dx dy dt. \quad (3)$$

Мінімум (2) з урахуванням показника якості $\lambda = \lambda_1$, де $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = \overline{1, m}$, на основі (3) буде таким:

$$v = 1 - \frac{1}{\tau \lambda_1}.$$

Тоді мінімальна похибка, що досягається при розкладі сигналу $f(t)$ на обмеженому інтервалі $i = \overline{1, n}$, буде такою:

$$v = 1 - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}.$$

Зрозуміло, що для будь-яких функцій розкладу випадкових сигналів з необмеженим спектром похибка розкладу залежить від виду функції кореляції $R(t)$ та інтервалу дискретизації. Порівнювати функції розкладу можна за коефіцієнтом надлишковості $\gamma = N/N_0$, де $N_0 = T/\tau_0$ – число некорельованих в середньому відліків; $N = T/\tau$ – число відліків, яке необхідне для досягнення заданої похибки. З урахуванням N та $N_0 - \gamma = \tau/\tau_0$, найкращим слід вважати розклад, який при однаковій похибці вимагає меншого коефіцієнта надлишковості. Найбільш простим є визначення критерію вірності при:

$$R(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau_0}, & \text{при } |t| < \tau_0, \\ 0, & \text{при інших } t. \end{cases}$$

Для обміну даними в рамках інформаційної системи бурового виробництва (ІСБВ), а також організації діалогу з операторами термінальних пунктів управління технологічними процесами на рівні бурової, виникає вимога видачі інформації планово-економічного та технологічного характеру в стандартному коді представлення алфавітно-цифрової інформації в реальному часі. На перешкоді є значна надлишковість інформації, що поступає переважно в аналоговому вигляді. З метою оптимізації відбору інформації, компактного представлення, передачі та її зберігання, був введений характеристичний параметр L , що представляє собою зручну оцінку втрати повідомлень, зумовлених дискретизацією процесу. На основі оцифрованих значень параметрів технологічного процесу буріння, що підлягали контролю та запису самопишучими приладами безпосередньо на буровій, були побудовані графіки нормованої автокореляційної функції процесів $R_{xx}(t)$. Побудова виконувалася з заданих наперед надлишково заданих значень

$Y(t)$, $t=1,900$, а кількість $R_{xx}(t)$, $t=1,k$, де k – число точок автокореляційної функції, причому $R_{xx}(k) < 0,01R_{xx}(0)$. Тоді можна записати, що

$$L = \frac{\sqrt{2}}{\Delta\xi} \sqrt{1 - R_{xx}(t)}, \quad (4)$$

де $\Delta\xi = \Delta y / \sigma$ – приведенне (нормоване) значення запасу норми; $\Delta y = y_{t+1} - y_t$ – приріст поточної ординати по відношенню до наступної на інтервалі дискретизації; σ – середнє квадратичне відхилення параметра, що контролюється.

На підставі (4), коли відома автокореляційна функція $R_{xx}(t)$ або хоча б її початкова ділянка, з урахуванням мінімально допустимої похибки [2] знаходимо y_{don} – допустимий крок дискретизації як абсцису перетину графіка $R_{xx}(t)$ з прямою, паралельною осі абсцис, віддаленою від дотичної $R_{xx}(1)$ на значення $0,045\Delta y$.

Оскільки всі етапи обчислень виконуються на комп'ютері, розглянемо аналітичний підхід визначення кроку дискретизації з графіка автокореляційної функції на рис. 1.

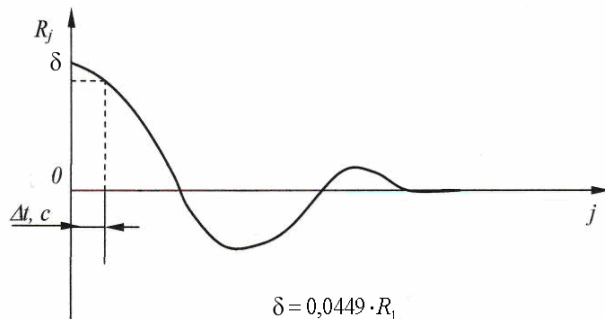


Рисунок 1 - Графік автокореляційної функції

Перш за все визначаємо, в межах якого інтервалу точок $R_{xx}(t)$, $R_{xx}(t+1)$ знаходиться величина $y = R_{xx}(1) - 0,045R_{xx}(1)$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки визначеного інтервалу $R_{xx}(t)$, $R_{xx}(t+1)$:

$$\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{R_{xx} - R_{xx}(i)}{R_{xx}(i+1) - R_{xx}(i)}$$

Підставивши замість R_{xx} позначення кроку дискретизації y , отримаємо, що

$$\Delta t = \frac{\delta - R_{xx}(i)(t_{i+1} - t_i)}{|R_{i+1} - R_i|} + t_i =$$

$$= \frac{0,955R_{xx}(1) - R_{xx}(i)(t_{i+1} - t_i)}{|R_{i+1} - R_i|} + t_i. \quad (5)$$

Використовуючи середовище MathCad, проілюструємо ефективність аналітичного визначення оптимального кроку дискретизації Δt (5) для трьох ділянок f_i, g_i, q_i технологічного процесу буріння (рис. 2).

Розв'язок в середовищі MathCad:

Вихідні дані:

Початок нумерації матриць: $ORIGIN = 1$

Кількість точок дискретизації: $n = 24$

Ранжована змінна: $i = 1,2 \dots n$

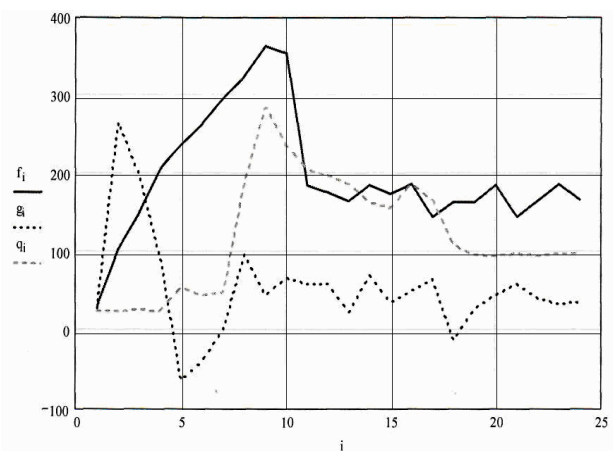


Рисунок 2 – Графіки зміни параметрів, що досліджуються

Обчислюємо математичні сподівання цих функцій:

$$M(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i,$$

$$M(f) = 196625; M(g) = 52875; M(q) = 121042.$$

Визначаємо центровані значення координат для цих функцій:

$$F_i = f_i - M(f), G_i = g_i - M(g), Q_i = q_i - M(q).$$

Обчислюємо значення автокореляційних функцій $j = 1,2 \dots n - 1$:

$$R_j = \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} (F_i \cdot F_{i+j}),$$

$$K_j = \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} (G_i \cdot G_{i+j}),$$

$$W_j = \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} (Q_i \cdot Q_{i+j}),$$

$$R_1 = 4,203 \times 10^3, K_1 = 1,735 \times 10^3, W_1 = 4,49 \times 10^3.$$

На рис. 3 в середовищі MathCad побудовані графіки автокореляційних функцій R_j, K_j, W_j значень технологічних параметрів f_i, g_i, q_i (рис. 2).

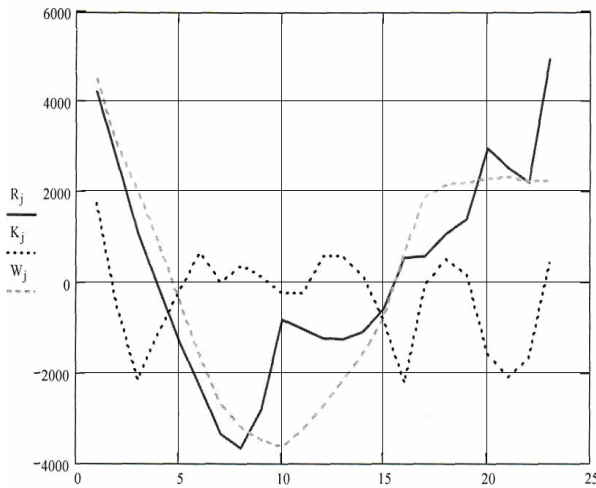


Рисунок 3 – Графіки автокореляційних функцій

Обчислюємо необхідну кількість значень автокореляційних функцій:

$$k(F) = \begin{cases} i \leftarrow 1 & k(R) = 4, \\ \text{while } F_i \geq 0,01F_1, & k(K) = 2, \\ i \leftarrow i + 1 & \\ i & k(W) = 5. \end{cases}$$

Обчислюємо крок дискретизації для цих функцій:

$$\Delta t(F, k) = \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ t \leftarrow \frac{0,9551F_1 - F_j}{|F_{j+1} - F_j|} + j \text{ if } F_{j+1} < 0,9551F_1. \\ t \end{cases}$$

Результати розрахунку:

$$\Delta t(R, k(R)) = 7,519; \quad \Delta t(K, k(K)) = 3,374; \\ \Delta t(W, k(W)) = 8,8.$$

В ідеальному випадку оцифровування відбувається через рівні проміжки часу. Проте в реальних аналогово-цифрових перетворювачах час моменту оцифровування схильний до відхилень через тремтіння фронту синхронізуючого сигналу (*clock jitter*). Вважаючи, що невизначеність моменту часу узяття відліку порядку Δt , одержуємо, що

помилка, зумовлена цим явищем, може бути оцінена так [1]:

$$E_{\text{аб}} \leq |\delta'(t)\Delta t| \leq 2A\pi f_0 \Delta t.$$

Легко побачити, що помилка відносно невелика на низьких частотах, проте на великих частотах вона може істотно зрости.

Ефект апертурної похибки може бути проігнорований, якщо її величина порівняно невелика в порівнянні з похибкою квантування. Таким чином, можна встановити наступні вимоги до тремтіння фронту сигналу синхронізації:

$$\Delta t < \frac{1}{2^n \pi f_0},$$

де n – розрядність АЦП, Δt – час тремтіння сигналу, f_0 – частота сигналу.

В табл. 1 для аналого-цифрових перетворювачів (АЦП) 5-ти стандартних частотних діапазонів представлені числові значення часу тремтіння фронту сигналу синхронізації.

Таблиця 1 - Вимоги до часу тремтіння фронту сигналу

Розрядність АЦП	Максимальна частота вхідного сигналу				
	44.1 кГц	192 кГц	1 МГц	10 МГц	100 МГц
8	28.2 нс	6.48 нс	1.24 нс	124 пс	12.4 пс
10	7.05 нс	1.62 нс	311 пс	31.1 пс	3.11 пс
12	1.76 нс	405 пс	77.7 пс	7.77 пс	777 фс
14	441 пс	101 пс	19.4 пс	1.94 пс	194 фс
16	441 пс	101 пс	19.4 пс	1.94 пс	194 фс
18	110 пс	25.3 пс	4.86 пс	486 фс	48.6 фс
24	430 фс	98.8 фс	19.0 фс	1.9 фс	190 ас

З табл. 1 можна зробити висновок про доцільність використання АЦП певної розрядності з урахуванням обмежень, що накладаються на час тремтіння фронту синхронізації (*clock jitter*).

Як правило, сигнали оцифровуються з мінімальною необхідною частотою дискретизації з міркувань економії. При цьому шум квантування є білим, тобто його спектральна густина потужності рівномірно розподілена по всій смузі. Якщо ж оцифрувати сигнал з частотою дискретизації, набагато більшої, ніж по теоремі Котельникова-Шеннона, а потім піддати цифровій фільтрації для придушення

спектру зовні частотної смуги початкового сигналу, то відношення сигнал/шум, буде кращим, ніж при використуванні всієї смуги. Таким чином можна досягти ефективної роздільної здатності більшої, ніж розрядність АЦП.

Передискретизація також може бути використана для пом'якшення вимог щодо крутизни переходу від смуги пропускання до смуги придушення антиаліасінгового фільтру. Для цього сигнал оцифровують (наприклад, на удвічі більшій частоті), потім проводять цифрову фільтрацію, пригнічуючи частотні компоненти зовні смуги початкового сигналу, і, нарешті, знижують частоту дискретизації шляхом децимації.

ВИСНОВОК

Проведена оцінка надмірності представлення інформації, яка задана за допомогою кореляційної функції та запропонований спосіб аналітичного визначення оптимального кроку дискретизації вимірювальної інформації. Розв'язок в середовищі MathCad дозволяє значно скоротити затрати часу на визначення оптимального кроку

дискретизації в порівнянні з традиційними способами інженерної практики. Розглянуто ефект апертурної помилки і сформульовані вимоги до тремтіння фронту сигналу синхронізації, а також питання передискретизації.

Література

1. Амебраев В.М., Васильев В.И., Гуревич И.М., Пак И.Т. *Распределения регулярных потоков сообщений в информационных системах.* – Алма-Ата: Наука КазССР. – 1980. – 144 с.
2. Белима А.С., Большевцев А.Д., Гребень И.И. *Теоретические основы централизованного контроля технологических процессов.* – К.: Вища школа. – 1973. – 242 с.

Поступила в редакцію 04.05.2009р.

**Рекомендував до друку докт. техн. наук,
проф. Горбійчук М.І.**