

УДК 534.121; 047.58

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІБРОАГРЕГАТІВ  
ДЛЯ ЛИВАРНОГО ВИРОБНИЦТВА****В. П. Нісонський**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15,  
Тел. +38 (0342) 723824; e-mail: [nmi@nung.edu.ua](mailto:nmi@nung.edu.ua)

*Рассмотрена методика построения математической модели виброударного агрегата с цепочно-разветвленным способом соединения твердых тел упругими связями. Приведены числовые расчеты для математической модели, которая соответствует выбивной промышленной решетке типа 31327. Показано влияние вязкого сопротивления на динамический процесс работы выбивной решетки. Построены амплитудно-частотные характеристики и фазовые портреты колебаний технологической нагрузки. Показана возможность регулирования амплитуды колебаний и виброускорения путем соответствующего выбора механических параметров выбивной решетки.*

*Ключевые слова: математическая модель, уравнения Лагранжа 2-го рода, виброударный агрегат, выбивная решетка, амплитудно-частотная характеристика, фазовый портрет.*

*Розглянуто методику побудови математичної моделі віброударного агрегата з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл пружними в'язями. Виконано числові розрахунки для моделі, яка відповідає вибивній промисловій ґратці типу 31327. Показано вплив в'язкого опору на динамічний процес роботи вибивної ґратки. Побудовано амплітудно-частотні характеристики і фазові портрети коливань технологічного навантаження. Показано можливість регулювання амплітуди коливань і віброприскорення шляхом відповідного вибору механічних параметрів вибивної ґратки.*

*Ключові слова: математична модель, рівняння Лагранжа 2-го роду, віброударний агрегат, вибивна ґратка, амплітудно-частотна характеристика, фазовий портрет.*

*The method of constructing a mathematical model of vibro-impact machine with chain-branched compounds manner solids elastic connections has been considered. The results of numerical calculations of the mathematical model, which corresponds to the knockout industrial lattice type 31327 have been presented. The effect of viscous resistance to the dynamic process of working knockout grid has been described. The frequency response and phase portraits of the load fluctuations process have been built. The possibility of adjusting the amplitude of the vibrations and acceleration by appropriately selecting mechanical parameters of the knockout grid has been presented.*

*Keywords: mathematical model, Lagrange equations of the 2nd kind, vibro-impact machine, knock-out grille, frequency response, phase portrait.*

Интерес до використання вібраційних технологій в практичній діяльності людини зростає [1 – 3]. Дуже важливим є використання вібраційних технологій у промисловості, а саме в роботі віброагрегатів (віброударних машин) для ливарного виробництва, промислових віброударних інструментів, транспортних засобів і грохотів, вібромайданчиків для ущільнення бетонної суміші та інших механізмів, в яких крім вібраційних процесів відбувається ще й контактна ударна взаємодія між окремими частинами чи ланками. Важливість вивчення роботи таких віброударних машин обумовлюється тим, що у багатьох технологічних процесах віброударні

явища є більш ефективними, ніж суто вібраційні. Таким чином, моделювання віброударних систем відіграє велику роль при конструюванні нових машин і агрегатів, а також при розрахунках їх роботи.

Метою даної роботи є побудова математичної моделі віброударного агрегата з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл, що дозволить підвищити ефективність роботи вибивних віброударних ґраток для ливарного виробництва. Побудована математична модель віброударного агрегата дозволяє проводити чисельні розрахунки динамічного режиму роботи промислових віброґраток для ливарного виробництва, у яких



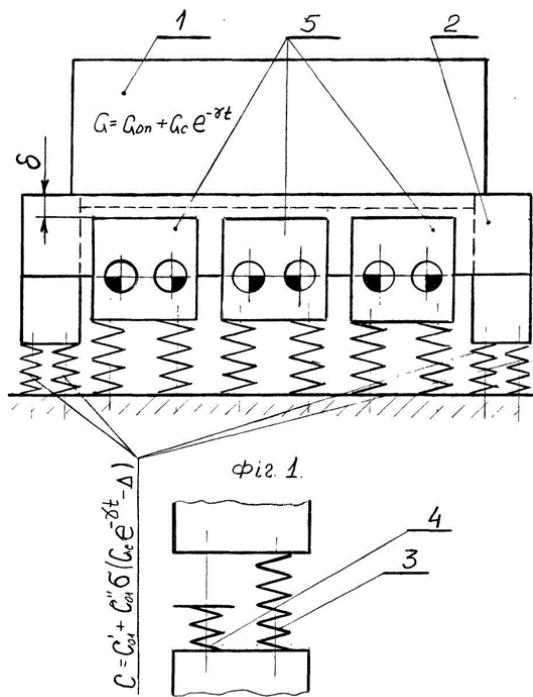


Рисунок 3 – Пристрій для вибивання ливарних форм

Пристрій складається з опорної рами, позначеної цифрою 2, для прийому ливарної форми, позначеної цифрою 1: пружної підвіски опорної рами, яка включає основні пружні зв'язки, позначені цифрою 3, і додаткові пружні зв'язки, позначені цифрою 4, а також інерційно-ударні вибивні ґратки, позначені цифрою 5.

В положенні статичної рівноваги між ливарною формою 1 і вибивними ґратками 5 передбачено технологічний зазор  $\delta$ , величина якого менша за амплітуду коливання вибивних ґраток.

Пристрій працює наступним чином.

Ливарна форма 1 встановлюється на підпружинену опорну раму 2. Під дією сили ваги ливарної форми опорна рама разом з нею опускається доти, доки зазор  $\delta$  набуває заданої величини. При включенні електродвигунів рухомі частини вибивних ґраток здійснюють коливання з амплітудою, більшою за величину зазору  $\delta$ , і вдаряють площиною полотна по робочій поверхні (ладу) нижньої опоки ливарної форми. Після кожного удару вибивних ґраток ливарна форма здійснює вільний політ, який закінчується ударом її з підпруженою опорною рамою. Далі процес вибивки періодично повторюється.

В [7 – 8] показано, як побудувати математичну модель динамічного режиму роботи простішої віброґратки без урахування сил в'язкого опору, що в цілому відповідає режиму роботи вибивної ґратки моделі 31327 (рис. 4).

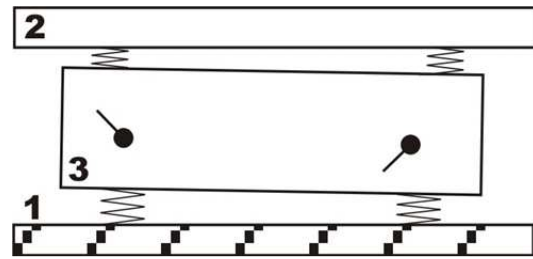


Рисунок 4 – Модель двосекційної ґратки з послідовним з'єднанням твердих тіл з пружними в'язами

Але цікавим і практично важливим є випадок наявності сил в'язкого опору для простішої віброґратки, як показано на рис. 5.

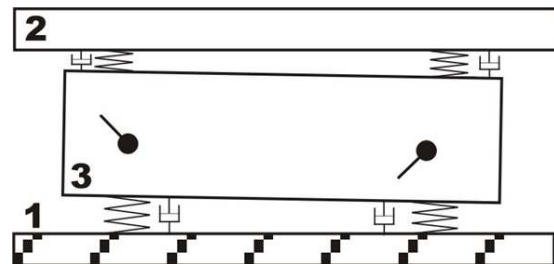


Рисунок 5 – Модель двосекційної віброґратки при наявності в'язкого опору.

Досліджується вплив в'язкого опору на амплітуди коливань та прискорень при динамічному режимі роботи.

На нерухомому фундаменті за допомогою пружних та в'язких зв'язків встановлена інерційна віброударна ґратка,  $i=3$  (рис. 5.14). Технологічне навантаження (ТН,  $i=2$ ) в початковому стані (стані рівноваги) має з віброударною ґраткою технологічний зазор  $\delta$ . При динамічному режимі роботи робочі органи віброґратки через пружні зв'язки взаємодіють з ТН і здійснюють при цьому плоско-паралельний рух. Механічні коливання віброґратки зумовлені дією інерційних сил, які виникають при обертанні дебалансних мас ( $j=31, j=32$ ), що приводяться в рух електродвигунами, які розміщені на двох валах в корпусі ударної віброґратки. В початковій стадії руху (стадії розгону) дебалансні маси мають кутове прискорення, і їх кутова швидкість зростає. В усталеному динамічному режимі роботи кутова швидкість дебаланса є максимальна і стала.

На підставі рівнянь Лагранжа II-го роду та з урахуванням отриманих в [9– 10] рівнянь руху системи з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл, для розглянутої механічної системи (рис. 5.14) маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 M_3 \ddot{x}_3 - S_{3,x} \ddot{\phi}_3 - S_{3,y} \ddot{\phi}_3^2 + \sum_{j=1}^2 (S_{3j,l,x} \ddot{\psi}_{3j} - S_{3j,l,y} \ddot{\psi}_{3j}^2) &= Q_{x_3}, \\
 M_3 \ddot{y}_3 + S_{3,y} \ddot{\phi}_3 - S_{3,x} \ddot{\phi}_3^2 + \sum_{j=1}^2 (S_{3j,l,y} \ddot{\psi}_{3j} + S_{3j,l,x} \ddot{\psi}_{3j}^2) &= Q_{y_3}, \\
 I_{0,3} \ddot{\phi}_3 - S_{3,x} \ddot{x}_3 + S_{3,y} \ddot{y}_3 + \\
 + \sum_{j=1}^2 (I_{\varepsilon,y}^j (\phi_3 - \psi_{3j1}) \ddot{\psi}_{3j}^2 - I_{\varepsilon,x}^j (\phi_3 - \psi_{3j}) \ddot{\psi}_{3j}) &= Q_{\phi_3}, \\
 I_{0,3j} \ddot{\psi}_{3j} + S_{3,y}^3 \ddot{x}_3 + S_{3,x}^3 - I_{\varepsilon,x}^j (\phi_3 - \psi_{3j}) \ddot{\phi}_3 - \\
 - M_2 \ddot{y}_2 + 2\gamma_{32} (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + 2C_{32} (y_2 - y_3) &= 0, \\
 I_{\varepsilon,y}^j (\phi_3 - \psi_{3j}) \ddot{\phi}_3^2 &= M_{\psi_j}, (j=1, 2), \\
 M_2 \ddot{x}_2 = Q_{x_2}, M_2 \ddot{y}_2 = Q_{y_2}, I_{0,2} \ddot{\phi}_2 &= Q_{\phi_2}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Тут  $x_i, y_i, \phi_i (i=2,3)$  – узагальнені координати ТН і віброгратки,  $\psi_{3j}$  – узагальнені координати дебалансів;  $M_i$  – маси ТН і віброгратки;  $S_{3,x}, S_{3,y}$  – статичні моменти ударно-вибивної гратки,  $S_{3,x}^3, S_{3,y}^3$  – статичні моменти дебалансів ударно-вибивної гратки (для тіл  $j=1,2$ );  $I_{0,3}, I_{0,3j}, I_{\varepsilon,x}^j, I_{\varepsilon,y}^j, I_{0,2}$  ( $j=1, 2$ ) – центральні осьові моменти інерції рухомих елементів системи. Вирази для статичних та осьових моментів а також узагальнених сил

$Q_{x_i}, Q_{y_i}, Q_{\phi_i}, M_{\psi_j} (i=2, 3; j=1, 2)$  подано у роботах [16, 17, 20]. Зазначимо, що вирази узагальнених сил містять константи які описують пружність ( $C_{13}, C_{32}$ ) та в'язкість ( $\gamma_{13}, \gamma_{32}$ ) зв'язків. Розрахунок обертового моменту, який приводить в рух дебаланси, зроблено згідно методики, описаної в [12,] для двигуна 4A160M8У3, характеристики якого приводяться в [13].

Аналіз розрахунків доцільно проводити, знаючи власні частоти коливань механічної системи. Так як швидкість обертання приводу двигуна в усталеному режимі практично не змінюється, то нехтуючи доданками вищих порядків, як показано в [11], отримали характеристичне рівняння для знаходження перших власних частот:

$$\begin{vmatrix} m_2 \cdot \lambda^2 + 2C_{23} & -2C_{23} \\ -2C_{23} & m_3 \cdot \lambda^2 + 2C_3 + 2C_{23} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (4)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 a &= m_2 m_3, & b &= m_2 C_3 + (m_2 + m_3) C_{23}, \\
 c &= 4 C_3 C_{23}.
 \end{aligned}$$

Чисельне моделювання динамічного режиму роботи проводилося для таких даних параметрів:  $M_2=1000$ ;  $m_{31}=20$ ;  $m_{32}=20$  – маси твердих тіл в кг;  $C_3=2000000$ ,  $C_{23}=500000$  жорсткість амортизаторів; де  $C_3$  – амортизатори, що знаходяться між фундаментом та вибивною граткою ( $i=3$ ),  $C_{23}$  – амортизатори, що стоять між вибивною граткою ( $i=3$ ) та технологічним навантаженням ( $i=2$ ). Початкові умови вибираємо положення рівноваги системи. Розглянуто такі варіанти маси ТН, для яких обчислено перші власні частоти:

$$M_2 = 2000 : \lambda_1 = 19,786 ; \lambda_2 = 71,474$$

$$M_2 = 4000 : \lambda_1 = 14,069 ; \lambda_2 = 71,078$$

$$M_2 = 6000 : \lambda_1 = 11,508 ; \lambda_2 = 70,952$$

$$M_2 = 8000 : \lambda_1 = 9,975 ; \lambda_2 = 70,891$$

Побудовано графіки амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) технологічного навантаження (ТН) від часу при різних початкових масах ТН  $m_2$ , рівних відповідно 2000, 4000, 6000 та 8000 кг. По осі ОХ дається час в сек, по осі ОУ – вертикальна координата  $y_2$  в м (рис.6 – 9). Власні частоти коливань ТН можна змінювати, змінюючи механічні параметри системи, тобто маси технологічного навантаження та віброударної гратки, маси дебалансів, жорсткість пружних зв'язків, можливі сили опору та ін.

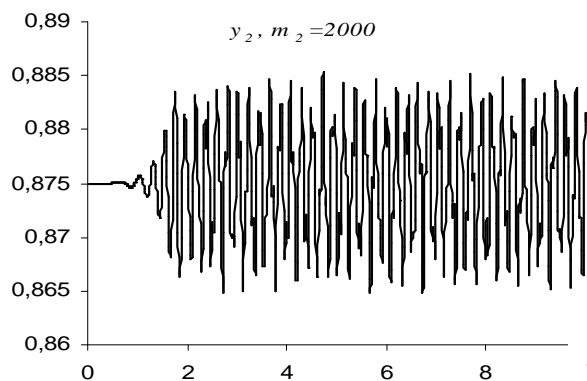


Рисунок 6 – Залежність амплітуди коливань ТН від часу при масі ТН 2000 кг

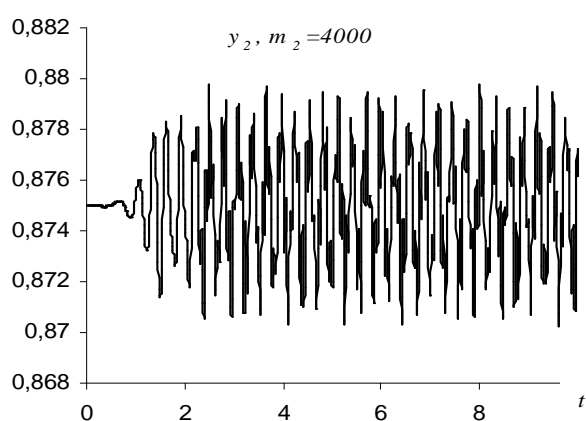


Рисунок 7 – Залежність амплітуди коливань ТН від часу при масі ТН 4000 кг

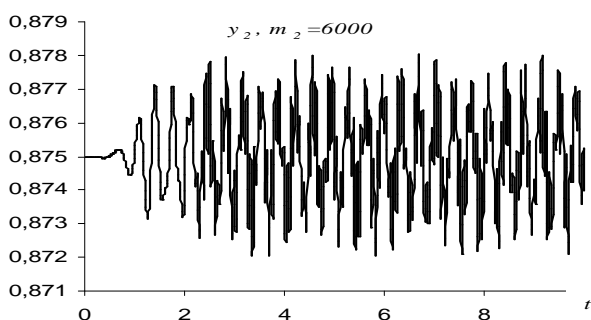


Рисунок 8 – Залежність амплітуди коливань ТН від часу при масі ТН 6000 кг

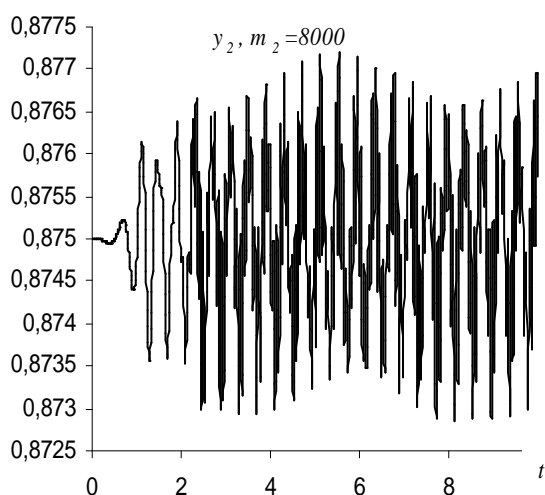


Рисунок 9. – залежність амплітуди коливань ТН від часу при масі ТН 8000 кг

На рис. 10 – 13 показані фазові портрети коливань ТН при масах ТН відповідно 2000, 4000, 6000 та 8000 кг.

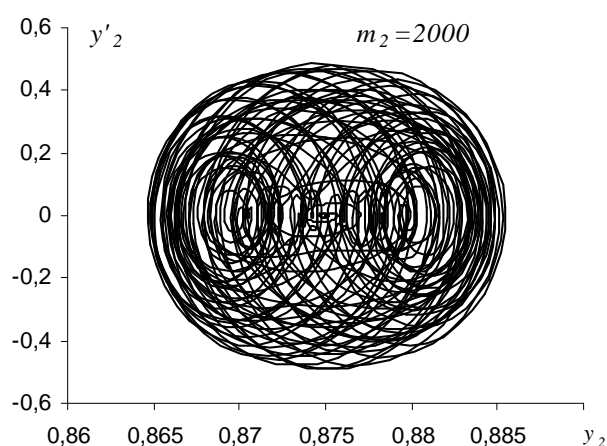


Рисунок 10 – Фазові криві коливань при масі ТН 2000 кг

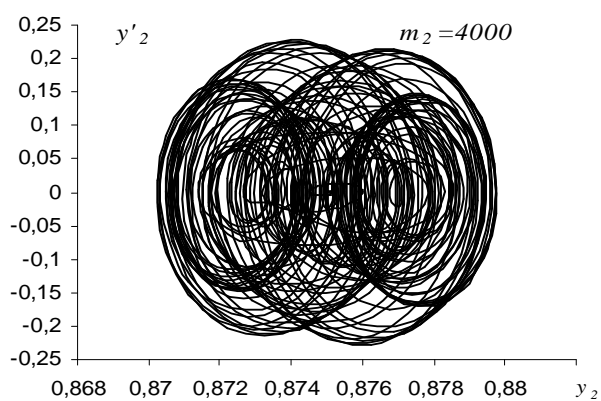


Рисунок 11 – Фазові криві коливань при масі ТН 4000 кг

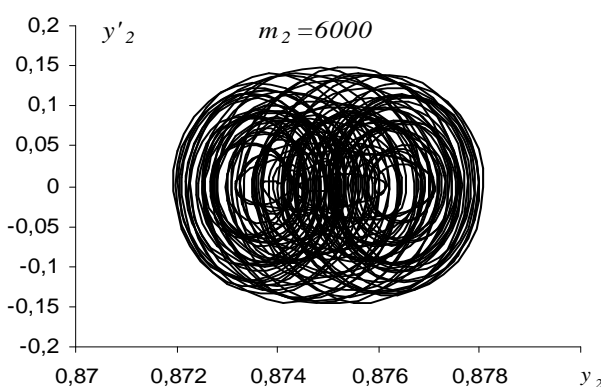
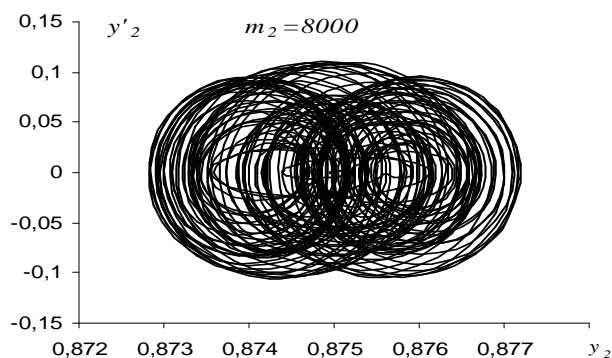


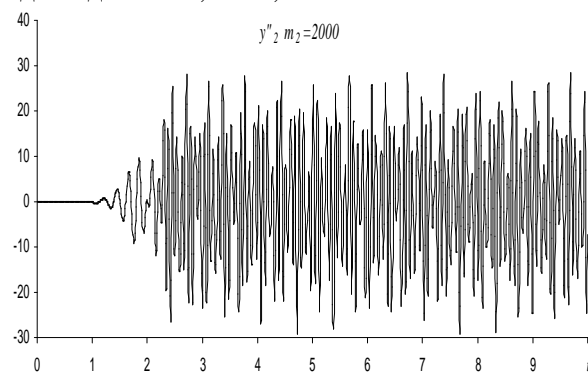
Рисунок 12 – Фазові криві коливань при масі ТН 6000 кг



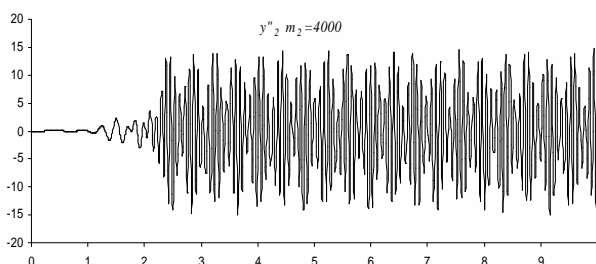
**Рисунок 13 – Фазові криві коливань при масі ТН 8000 кг**

Фазові криві руху ТН показують, що система є механічно стійкою, так як фазові портрети знаходяться в скінченних областях на фазовій площині [11]. Таким чином, дані механічні параметри забезпечують механічну стійкість віброагрегату.

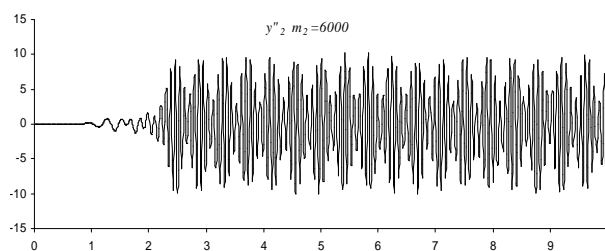
На рисунках 14 – 17 показано залежність віброприскорення коливань ТН при масах відповідно 2000, 4000, 6000 та 8000 кг.



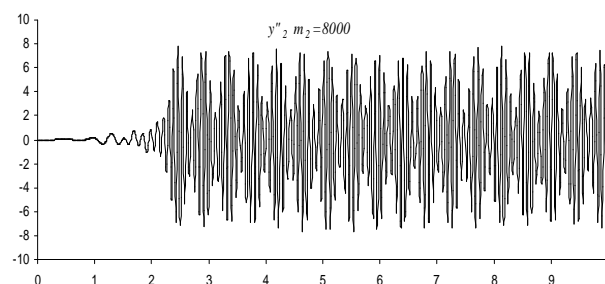
**Рисунок 14 – Залежності віброприскорення коливань від часу при масі ТН 2000 кг**



**Рисунок 15 – Залежності віброприскорення коливань від часу при масі ТН 4000 кг**



**Рисунок 16 – Залежності віброприскорення коливань від часу при масі ТН 6000 кг**



**Рисунок 17 – Залежності віброприскорення коливань від часу при масі ТН 8000 кг**

Числові розв'язки системи (2) отримано методом Адамса для різних значень механічних параметрів системи. Зокрема досліджували вплив в'язкості зв'язків на значення амплітуди коливань та амплітуди прискорення ТН. З метою спрощення аналізу результатів розглянуто синхронне обертання

Порівняльні результати обчислень амплітуд та власних значень частот наведено у таблиці 1.

Тут  $C_{13}$ ,  $C_{32}$  – відповідні жорсткості,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{32}$  – в'язкий опір,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  – власні частоти відповідно ТН та віброгратки, які позначені на рис. 4 і 5 відповідно цифрами 2 і 3;  $\epsilon$  – радіус для дебалансних мас.

Цікавим є останній випадок (рядок 5), який показав, що підібрані певним чином параметри забезпечили коливання ТН з величиною амплітуди коливання  $4 \cdot 10^{-3}$  м та прискорення  $23,43$  м/сек<sup>2</sup>, у той час як показники у віброгратки на два порядки менші.

Із збільшенням жорсткості пружних в'язів між вибивною граткою та фундаментною рамою амплітуда коливань, як і швидкість руху ТН, зменшується. При цьому збільшуються і власні частоти системи. Таким чином, є можливість регулювання власних частот, амплітуди коливань та віброприскорення ТН шляхом відповідного вибору механічних параметрів віброгратки та в'язкого тертя. Ці результати відповідно відображені і в табл. 1.



Таблиця 1 – Амплітуди, віброприскорення і власні частоти ТН та віброгратки при різних механічних параметрах системи

с	$C_{13}$	$C_{32}$	$\gamma_{13}$	$\gamma_{32}$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\epsilon$	$A_2$	$A_3$	$A_{W_2}$	$A_{W_3}$
1.	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	0	0	29,61	95,51	0,1	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	16,78	32,26
2.	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	29,59	94,83	0,1	$2,59 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	15,08	28,61
3.	$1,4 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^6$	0	0	24,02	76,31	0,1	0,25	0,89	1409	5455
4.	$1,4 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	24,22	76,46	0,1	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	19,75	68,45
5.	$10^6$	$5,8 \cdot 10^6$	$10^3$	$10^3$	24,85	137	0,2	$4 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	23,43	0,3

Проведене дослідження демонструє методику побудови математичної моделі віброагрегата з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл. Проведені числові розрахунки для простішої моделі віброагрегата з врахуванням в'язкого опору. Показано вплив механічних параметрів віброгратки та в'язкого тертя на такі важливі характеристики динамічного процесу, як віброприскорення та амплітуда коливань.

Є значні перспективи проведення подальших теоретичних досліджень. В подальшому планується проведення числових розрахунків складніших моделей динамічного режиму роботи віброграток з врахуванням різного виду опору. Планується також подальше впровадження результатів досліджень на виробництві.

### Література

1. Гергега І.І. Математична модель ланцюгово-розгалуженої віброударної коливальної системи / І.І. Гергега, В.П. Нісонський // Доповіді НАН України. – 1994. - №5. – С. 58-63
2. Нісонський В.П. Математическая модель многосекционных выбивных агрегатов с учётом рассеяния энергии / Нісонський В.П., Гергега І.І., Козулькевич М.Р., Гуцуляк Ю.В. // Пробл. Прочности. 1994. - №10. – С. 30-36.
3. Нісонський В.П. Математична модель багатосекційного вібраційного агрегату / Нісонський В.П., Гергега І.І., Шона В.М. // Доповіді НАН України. – 2000. - № 6. – С. 62-65.
4. Нісонський В.П. Математичне моделювання динамічного режиму роботи віброударних агрегатів з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл / Нісонський В.П. – Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Український міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 40. – Львів: Львівська Політехніка. – 2006. – С. 170-177.
5. Нісонський В.П. Математичне моделювання віброударних агрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл / Нісонський В.П., Шона В.М., Гергега І.І. // Прикарпатський вісник НТШ. Число 1(1). – 2008. – Івано-Франківськ: Плай ЦІТ. – С. 56-63.

6. Nisonskii V.P. Mathematical model for multisectional shakeout assemblies taking into account energy dissipation / V.P. Nisonskii, I.I. Gerega, R.M. Kozul'kevich, Yu.V. Gutsulyak // Strength of Materials, October 1994, Volume 26, Issue 10, pp 734 – 738.

7. Нісонський В.П. Числові розрахунки динамічного режиму роботи віброагрегата / В.П. Нісонський, Т.Г. Даляк, В.М. Шона // Машинознавство. – 2011. - №9-10. – С. 31 – 35.

8. Даляк Т. Числові розрахунки динамічних характеристик математичної моделі віброгратки / Т.Г. Даляк, В.П. Нісонський, В.М. Шона // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій. Праці 2-ої Міжнарод.наук.-техн. конф., 11-13 листопада 2010 р. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – С. 152-153.

9. Даляк Т.М., Нісонський В.П., Шона В.М. Дослідження динамічного режиму роботи віброгратки з урахуванням сил в'язкого опору // Вісник ХПІ, серія «Машинознавство та САПР». – Вип. №22. – 2011 р. – С. 40 – 45.

10. Нісонський Володимир. Дослідження динамічного режиму роботи віброгратки при наявності сил в'язкого опору / Володимир Нісонський // Тези доп. Міжнарод. наук.-техн. конференції «Фундамент. та прикл. проблеми сучасних технологій», присвяч. 55-річчю заснування ТНТУ та 170-річчю з дня народження Івана Пулюя 19–21 травня 2015 р. – Тернопіль, 2015. – С. 20 – 21.

11. Нісонський В.П. Розрахунки динамічного режиму віброгратки при наявності в'язкого опору / В.П. Нісонський // Прикарпатський вісник НТШ. Число. Вип. 1 (33). – Івано-Франківськ, 2016. – С.46 – 60.

12. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электро-приводе / С.Н. Вешеневский. – М., Л.: Энергия, 1966. – 400 с.

13. Алиев И.И. Справочник по электротехнике и электрооборудованию: Учебное пособие для ВУЗов. 2 изд. / И.И. Алиев. – М.: Высшая школа, 2000. – 256 с.

Поступила в редакцію 04.06.2016 р.

Рекомендували до друку:  
докт. техн. наук, проф. Райтер П. М.,  
докт. техн. наук, проф. Олійник А. П.