

МЕТОДИ ТА ПРИЛАДИ КОНТРОЛЮ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

УДК 622.691.4.052.012

МЕТОД СИНТЕЗУ ЕМПІРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ВРАХУВАННЯМ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

М. І. Горбійчук, І. В. Щупак, Т. М. Осколін

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, тел.: (0342)504521, e-mail: gorb@nung.edu.ua

Зроблено аналіз впливу похибок на результат синтезу емпіричних моделей за допомогою генетичного алгоритму. Отримані залежності для визначення параметрів моделі з врахуванням похибок вимірювань відповідних технологічних параметрів і показано на конкретному прикладі моделювання роботи газоперекачувального агрегату, що при існуючих засобах вимірювань похибки приладів незначно впливають на точність отриманих емпіричних моделей.

Ключові слова: синтез, емпірична модель, похибки вимірювань, генетичний алгоритм, газоперекачувальний агрегат.

Проведен анализ влияния погрешностей на результат синтеза эмпирических моделей с помощью генетического алгоритма. Получены зависимости для определения параметров модели с учетом погрешностей измерений соответствующих технологических параметров и показано на конкретном примере моделирования работы газоперекачивающего агрегата, что при существующих средствах измерений погрешности приборов незначительно влияют на точность полученных эмпирических моделей.

Ключевые слова: синтез, эмпирическая модель, погрешности измерений, генетический алгоритм, газоперекачивающий агрегат.

The analysis of influence of errors is conducted on the result of synthesis of empiric models by a genetic algorithm. Dependences are got for determination of model parameters taking into account the errors of measurings of the proper technological parameters and it is rotined on the concrete example of design of work of gascompressor unit, that at existent facilities of measurings of error of devices insignificantly influence on exactness of the got empiric models.

Keywords: synthesis, empiric model, errors of measurings, genetic algorithm, gas-pumping an asm.

Традиційно для побудови емпіричних моделей використовують метод найменших квадратів. Близьким до нього є індуктивний метод самоорганізації моделей, який запропонований акад. О. Г. Івахненком і розвинутий його послідовниками. При реалізації цих методів допускають, що відомі точні значення фізичних величин, які є змінними моделей. Очевидно, що таке припущення в певній мірі ідеалізує умови спостереження за діючим об'єктом, оскільки будь-яка фізична величина вимірюється з певною похибкою.

Метою даної роботи є розроблення методу побудови емпіричних моделей за результатами пасивного експерименту з врахуванням похибок вимірювань технологічних параметрів.

Пасивний експеримент найчастіше зустрічається при побудові емпіричних моделей складних технічних об'єктів.

Ставиться задача знайти емпіричну модель об'єкта $\eta = f(\bar{a}, \bar{\xi})$, коли точні значення вихідної величини η , а також вихідних величин ξ_i невідомі. Це пояснюється тим, що у процесі вимірювання як вхідних ξ_i , так і вихідної η величин їх значення спотворюється внаслідок того, що процес вимірювання здійснюється з певною похибкою. Якщо на вхід вимірювального пристрою поступає величина ξ_i чи η , то на виході отримаємо значення x_i або y_i (рис. 1). Тобто

$$x_i = \xi_i + E_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$y = \eta + \Delta, \quad (2)$$

де n - кількість вхідних величин об'єкта.

У теорії вимірювань випадкові величини це, як правило, незалежні випадкові величини, які

мають нормальний закон розподілу [1].

Оскільки ξ_i і η дійсні значення вимірювальних величин, а $M[E_i] = M[\Delta] = 0$, то ξ_i і η слід трактувати як математичні сподівання випадкових величин x_i та \tilde{Y} . У процесі спостережень за об'єктом отримуємо сукупність величин $x_i^{(k)}$, $y^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, де N - кількість експериментальних точок. Оскільки величини $x_i^{(k)}$ і $y^{(k)}$ у своїй сукупності незалежні випадкові величини і кожна із них підкоряється нормальному розподілу, то їх сумісний закон розподілу також буде нормальним [2]. Тоді для фіксованого значення k щільність густини розподілу p_k буде такою:

$$p_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}) = \frac{|C^{(k)}|^{1/2}}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ij}^{(k)} (x_i^{(k)} - \xi_i^{(k)}) (x_j^{(k)} - \xi_j^{(k)})\right), \quad (3)$$

де $x_{n+1}^{(k)} = y^{(k)}$, $\xi_{n+1}^{(k)} = \eta^{(k)}$; $C^{(k)}$ - матриця обернена до коваріаційної матриці $D^{(k)} = M[(\bar{x} - \bar{\xi})^T (\bar{x} - \bar{\xi})]$; $c_{ij}^{(k)}$ - елементи матриці $C^{(k)}$.

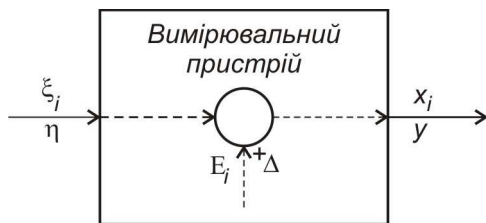


Рисунок 1 – Процес вимірювання величин ξ_i або η

Як випливає із формул (1) і (2) $E_i = x_i - \xi_i$, $\Delta = y - \eta$. Якщо випадкові величини у своїй сукупності статистично незалежні, то співвідношення (3) набуде такого вигляду:

$$p_k(E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \dots, E_n^{(k)}, \Delta^{(k)}) = \frac{1}{\sigma(\Delta^{(k)}) \prod_{i=1}^n \sigma(E_i^{(k)}) (2\pi)^{(n+1)/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(E_i^{(k)})^2}{\sigma^2(E_i^{(k)})} + \frac{(\Delta^{(k)})^2}{\sigma^2(\Delta^{(k)})} \right)\right). \quad (4)$$

Знайдемо тепер закон розподілу для всіх значень $E_i^{(k)}$, $\Delta^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, N}$. Враховуючи

раніше зроблені допущення, будемо мати

$$p(E, \Delta) = \prod_{k=1}^N p_k(E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \dots, E_n^{(k)}, \Delta^{(k)}).$$

Якщо прийняти до уваги формулу (4), то

$$p(E, \Delta) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma(\Delta^{(k)}) \prod_{i=1}^n \sigma(E_i^{(k)}) (2\pi)^{(n+1)/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \frac{(E_i^{(k)})^2}{\sigma^2(E_i^{(k)})} + \sum_{k=1}^N \frac{(\Delta^{(k)})^2}{\sigma^2(\Delta^{(k)})} \right)\right). \quad (5)$$

Відповідно до формули (5) знайдемо

$$\ln p(E, \Delta) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \frac{(E_i^{(k)})^2}{\sigma^2(E_i^{(k)})} + \sum_{k=1}^N \frac{(\Delta^{(k)})^2}{\sigma^2(\Delta^{(k)})} \right) + \ln \left(\frac{1}{\sigma(\Delta^{(k)}) \prod_{i=1}^n \sigma(E_i^{(k)}) (2\pi)^{(n+1)/2}} \right).$$

Таким чином, оцінка шуканих параметрів \bar{a} емпіричної моделі

$$\eta = f(\bar{a}, \bar{\xi}) \quad (6)$$

знаходиться із умови мінімуму функціонала

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \frac{(E_i^{(k)})^2}{\sigma^2(E_i^{(k)})} + \sum_{k=1}^N \frac{(\Delta^{(k)})^2}{\sigma^2(\Delta^{(k)})} \right). \quad (7)$$

У процесі вимірювань величин ξ_i і η метрологічні характеристики приладів змінюються досить повільно. Тому можна вважати, що на протязі часу спостережень

$$\sigma(E_i^{(1)}) = \sigma(E_i^{(2)}) = \dots = \sigma(E_i^{(N)}) = \sigma(E_i) = const,$$

$$\sigma(\Delta^{(1)}) = \sigma(\Delta^{(2)}) = \dots = \sigma(\Delta^{(N)}) = \sigma(\Delta) = const.$$

З урахуванням останніх умов функціонал (7) набуде такого вигляду:

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(E_i)} \sum_{k=1}^N (E_i^{(k)})^2 + \frac{1}{\sigma^2(\Delta)} \sum_{k=1}^N (\Delta^{(k)})^2 \right). \quad (8)$$

В останній формулі величини $\varepsilon_i^{(k)} = \frac{(E_i^{(k)})}{\sigma(E_i)}$ і

$\delta^{(k)} = \frac{\Delta^{(k)}}{\sigma(\Delta)}$ є нормованими змінними. Тому

замість функціоналу (8) надалі будемо розглядати функціонал

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N (\varepsilon_i^{(k)})^2 + \sum_{k=1}^N (\delta^{(k)})^2 \right). \quad (9)$$

У векторній формі функціонал (9) подамо таким чином:

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N (\bar{\varepsilon}^{(k)})^T \bar{\varepsilon}^{(k)} + \bar{\delta}^T \bar{\delta} \right), \quad (10)$$

де $\bar{\varepsilon}^{(k)} = (\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})^T$, $\bar{\delta} = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N)})^T$.

Із формули (2) випливає, що

$$\Delta^{(k)} = y^{(k)} - \eta^{(k)}.$$

Оскільки $\delta^{(k)} = \frac{\Delta^{(k)}}{\sigma(\Delta)}$, то $\delta^{(k)} = \frac{1}{\sigma(\Delta)} (y^{(k)} - \eta^{(k)})$.

Якщо врахувати ту обставину, що $\eta^{(k)} = f^{(k)}(\bar{a}, \bar{\xi}^{(k)})$, то

$$\delta^{(k)} = \frac{1}{\sigma(\Delta)} \left(y^{(k)} - f^{(k)}(\bar{a}, \bar{\xi}^{(k)}) \right).$$

Розглянемо найпоширеніший випадок побудови емпіричних моделей, коли параметри моделі лінійно входять у вираз $f(\bar{a}, \bar{\xi})$, тобто

$$f(\bar{a}, \bar{\xi}) = \sum_{i=0}^M a_i f_i(\bar{\xi}). \quad (11)$$

Результати спостереження за об'єктом дають змогу сформулювати вектор

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\sigma(\Delta)} (\bar{Y} - F(\bar{\xi})\bar{a}), \quad (12)$$

$$\text{де } F(\bar{\xi}) = \begin{bmatrix} f_0(\bar{\xi}^{(1)}) & f_1(\bar{\xi}^{(1)}) & \dots & f_M(\bar{\xi}^{(1)}) \\ f_0(\bar{\xi}^{(2)}) & f_1(\bar{\xi}^{(2)}) & \dots & f_M(\bar{\xi}^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\bar{\xi}^{(N)}) & f_1(\bar{\xi}^{(N)}) & \dots & f_M(\bar{\xi}^{(N)}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)})^T.$$

Враховуючи те, що $\bar{\xi}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - \bar{E}^{(k)}$, де $\bar{E}^{(k)} = (E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \dots, E_n^{(k)})^T$, можемо записати, що

$$f_i(\bar{\xi}^{(k)}) = f_i(\bar{x}^{(k)} - \bar{E}^{(k)}), \quad i = \overline{0, M}.$$

У процесі вимірювань похибки $\varepsilon_i^{(k)}$ значно менші за значення вимірювальних величин $\xi_i^{(k)}$. Тому функції $f_i(\bar{x}^{(k)} - \bar{E}^{(k)})$ можна розкласти у ряд Тейлора, обмежившись лише лінійними членами ряду

$$f_i(\bar{x}^{(k)} - \bar{E}^{(k)}) \approx f_i(\bar{x}^{(k)}) - (\bar{\gamma}_i^{(k)})^T \bar{E}^{(k)},$$

$$\text{де } \bar{\gamma}_i^{(k)} = \left. \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}^{(k)}}, \quad i = \overline{0, M}.$$

З урахуванням останнього результату будемо мати, що

$$F(\bar{\xi}) = \begin{bmatrix} f_0(\bar{x}^{(1)}) - (\bar{\gamma}_0^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} & f_1(\bar{x}^{(1)}) - (\bar{\gamma}_1^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} & \dots & \dots \\ f_0(\bar{x}^{(2)}) - (\bar{\gamma}_0^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} & f_1(\bar{x}^{(2)}) - (\bar{\gamma}_1^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\bar{x}^{(N)}) - (\bar{\gamma}_0^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} & f_1(\bar{x}^{(N)}) - (\bar{\gamma}_1^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} & \dots & \dots \\ \dots & f_M(\bar{x}^{(1)}) - (\bar{\gamma}_M^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} & \dots & \dots \\ \dots & f_M(\bar{x}^{(2)}) - (\bar{\gamma}_M^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & f_M(\bar{x}^{(N)}) - (\bar{\gamma}_M^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Таким чином матриця $F(\bar{\xi})$ розпадається на дві матриці F_x і F_ε , тобто

$$F(\bar{\xi}) = F_x - F_\varepsilon, \quad (13)$$

$$\text{де } F_x = \begin{bmatrix} f_0(\bar{x}^{(1)}) & f_1(\bar{x}^{(1)}) & \dots & f_M(\bar{x}^{(1)}) \\ f_0(\bar{x}^{(2)}) & f_1(\bar{x}^{(2)}) & \dots & f_M(\bar{x}^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\bar{x}^{(N)}) & f_1(\bar{x}^{(N)}) & \dots & f_M(\bar{x}^{(N)}) \end{bmatrix},$$

$$F_\varepsilon = \begin{bmatrix} (\bar{\gamma}_0^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} & (\bar{\gamma}_1^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} & \dots & (\bar{\gamma}_M^{(1)})^T \bar{E}^{(1)} \\ (\bar{\gamma}_0^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} & (\bar{\gamma}_1^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} & \dots & (\bar{\gamma}_M^{(2)})^T \bar{E}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{\gamma}_0^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} & (\bar{\gamma}_1^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} & \dots & (\bar{\gamma}_M^{(N)})^T \bar{E}^{(N)} \end{bmatrix}.$$

З урахуванням формул (12) і (13) функціонал (10) набуде такого вигляду:

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N (\bar{\varepsilon}^{(k)})^T \bar{\varepsilon}^{(k)} + \frac{1}{\sigma^2(\Delta)} (\bar{Y} - (F_x - F_\varepsilon)\bar{a})^T (\bar{Y} - (F_x - F_\varepsilon)\bar{a}) \right). \quad (14)$$

У конфлюентному аналізі [3] для ідентифікації параметрів математичної моделі (11) мінімізація функціоналу (14) проводиться як змінними $E_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, N}$, так і за змінними a_j , $j = \overline{1, M}$ з урахуванням обмеження $E_i^{(k)} \in G_i$, де область G_i може бути довірчий інтервал для змінної ε_i .

Розв'язок поставленої задачі наштовхується на ряд труднощів.

По-перше, для визначення довірчих інтервалів необхідна інформація про дисперсії [4] похибок вимірювань кожної вхідної величини об'єкта. При реалізації пасивного експерименту така інформація, як правило, невідома.

По-друге, функціонал (14) вміщує значну кількість невідомих, які необхідно визначити у процесі його мінімізації. Так, наприклад, якщо математичну модель складного об'єкта вибрати у вигляді полінома степені r , а кількість вхідних змінних дорівнює n ; кількість точок спостереження N , то загальна кількість змінних, за якими мінімізується функціонал (14), визначиться за формулою $n_s = nN + M$. Число членів полінома M визначають у відповідності із таким виразом [5]:

$$M = \frac{(r+n)!}{r!n!}. \quad (15)$$

При побудові емпіричних моделей, наприклад, газоперекачувальних агрегатів число змінних x_i може досягати $n \geq 5$, степінь полінома $r \geq 4$ при $N \geq 3000$. У такому разі нижня межа кількості змінних, яку необхідно визначити у процесі мінімізації функціоналу (14), буде такою:

$$\inf : n_s = 3000 \cdot 5 + \frac{9!}{4!5!} = 15130.$$

Отримане значення число змінних є надто великим навіть для сучасних ЕОМ.

Задачу ідентифікації параметрів математичної моделі (11) можна значно спростити, якщо замість $E_i^{(k)}$ взяти абсолютну похибку вимірювання фізичної величини x_i , яка визначається технічними характеристиками відповідних вимірювальних пристроїв, тобто допустимо, що

$$E_i^{(1)} = E_i^{(2)} = \dots = E_i^{(N)} = E_i = \text{const}. \quad (16)$$

У такому випадку задача ідентифікації моделі (11) зводиться до мінімізації функціоналу (14) за вектор-змінною \bar{a} . Оскільки на вектор-змінну \bar{a} не накладається ніяких обмежень, то \bar{a} можна знайти з рівняння

$$\frac{\partial J(\bar{a})}{\partial \bar{a}} = 0 \quad (17)$$

при виконанні умови (16).

Після розкриття дужок у виразі (14) і використання умов $(F_x \bar{a})^T \bar{Y} = \bar{Y}^T F_x \bar{a}$ і $(F_\varepsilon \bar{a})^T \bar{Y} = \bar{Y}^T F_\varepsilon \bar{a}$ отримаємо, що

$$J(\bar{a}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_i^T \bar{\varepsilon}_i + \bar{Y}^T \bar{Y} - 2\bar{Y}^T (F_x - F_\varepsilon) \bar{a} + \right.$$

$$\left. + \bar{a}^T (M_x + M_\varepsilon - M_{x\varepsilon} - M_{\varepsilon x}) \right),$$

де $M_x = F_x^T F_x$, $M_\varepsilon = F_\varepsilon^T F_\varepsilon$, $M_{x\varepsilon} = F_x^T F_\varepsilon$ і $M_{\varepsilon x} = F_\varepsilon^T F_x$.

Використовуючи умову (17), знаходимо, що

$$(M_x + M_\varepsilon - M_{x\varepsilon} - M_{\varepsilon x}) \bar{a} = (F_x - F_\varepsilon)^T \bar{Y}. \quad (18)$$

Отримане матрично-векторне рівняння (18) розпадається на лінійну систему із $M+1$ рівнянь відносно змінних a_j , $j=0, M$, розв'язок якої може бути знайдений одним із числових методів [6]. У тому випадку, коли існує матриця $C_{\varepsilon x}$ обернена до матриці $M_x + M_\varepsilon - M_{x\varepsilon} - M_{\varepsilon x}$, то вектор параметрів моделі (11) можна безпосередньо визначити із рівняння (18), тобто

$$\bar{a} = C_{\varepsilon x} (F_x - F_\varepsilon)^T \bar{Y},$$

де $C_{\varepsilon x} = (M_x + M_\varepsilon - M_{x\varepsilon} - M_{\varepsilon x})^{-1}$.

Відмітимо, що у випадку нехтування похибками вимірювань вхідних величин $x_i \forall i$, матриця $F_\varepsilon = 0$ і відповідно $M_\varepsilon = M_{x\varepsilon} = M_{\varepsilon x} = 0$, приходимо до відомого рівняння методу найменших [7]:

$$\bar{a} = C F_x^T \bar{Y},$$

де $C = M_x^{-1}$ - дисперсійна матриця; $M_x = F_x^T F_x$ - матриця Фішера.

При побудові емпіричних моделей найчастіше використовують таку поліноміальну залежність [8]:

$$f(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{z_{ij}}, \quad (19)$$

де степені z_{ij} аргументів x_j приймають значення 0, 1, 2, ..., і задовольняють обмеженню $\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq r$; r - максимальна степінь полінома (19).

У випадку моделі (19) матриця F_x буде такою:

$$F_x = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^n (x_j^{(1)})^{z_{0j}} & \prod_{j=1}^n (x_j^{(1)})^{z_{1j}} & \dots & \prod_{j=1}^n (x_j^{(1)})^{z_{M-1j}} \\ \prod_{j=1}^n (x_j^{(2)})^{z_{0j}} & \prod_{j=1}^n (x_j^{(2)})^{z_{1j}} & \dots & \prod_{j=1}^n (x_j^{(2)})^{z_{M-1j}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{j=1}^n (x_j^{(N)})^{z_{0j}} & \prod_{j=1}^n (x_j^{(N)})^{z_{1j}} & \dots & \prod_{j=1}^n (x_j^{(N)})^{z_{M-1j}} \end{bmatrix}.$$

Для знаходження елементів матриці F_ε обчислимо величини $\bar{\gamma}_i^{(k)}$, $i=0, M-1$. Для цього необхідно знайти компоненти вектора $\bar{\gamma}_i^{(k)}$. В результаті отримаємо, що

$$\frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_v} = z_{iv} x_v^{z_{iv}-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^n x_j^{z_{ij}} = \frac{z_{iv}}{x_v} \prod_{j=1}^n x_j^{z_{ij}},$$

$$i = \overline{0, M-1}, v = \overline{1, n}.$$

З урахуванням отриманого результату можемо записати, що

$$\bar{y}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{z_{i1}}{x_1} \prod_{j=1}^n x_j^{z_{ij}} \\ \frac{z_{i2}}{x_2} \prod_{j=1}^n x_j^{z_{ij}} \\ \dots \\ \frac{z_{in}}{x_n} \prod_{j=1}^n x_j^{z_{ij}} \end{bmatrix}_{\bar{x}=\bar{x}^{(k)}}, \quad i = \overline{0, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Таким чином, за формулою (20) можна знайти вектор $\bar{y}_i^{(k)}$, а при зробленому допущенні (16) і матрицю F_ε .

При побудові емпіричних моделей необхідно знайти не тільки параметри моделі, але й синтезувати структуру такої моделі.

На практиці, як правило, структура моделі (11) невідома, що приводить до необхідності довільного вибору як числа функцій, так і вигляду самих функцій у моделі (11). Критерій (9), який використовується для визначення параметрів моделі (11), є внутрішнім критерієм [8] і його використання приводить до помилкового правила: чим складніша модель, тим вона точніша. Складність моделі, наприклад, поліноміальної, визначається числом членів і найвищою степенню полінома: чим більше членів полінома, тим менше значення критерію апроксимації (9).

Тому для вибору структури моделі (11) був запропонований індуктивний метод самоорганізації моделей [9], ідейну сторону якого визначає теорема Геделя. У відповідності з цією теоремою ніяка система аксіом не може бути логічно замкнутою: завжди можна знайти таку теорему, для доведення якої необхідне зовнішнє доповнення – розширення початкової системи аксіом. Стосовно задачі визначення структури моделі (11) гедельський підхід означає застосування зовнішнього критерію, який дає можливість однозначного вибору єдиної моделі із заданого класу моделей. Критерій називають зовнішнім, якщо його визначення засновано на застосуванні нових даних, які не використовувались при синтезі моделі (11). Це означає, що всі дані, які отримані у результаті експерименту, розбиваються на дві частини N_A і N_B . Перша із

них - навчальна, а друга – перевірна.

У більшості випадків [8] для вибору структури моделі використовують критерій регулярності

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (Y_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_B} Y_i^2} \quad (21)$$

і мінімуму зміщення

$$\Delta^2(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i(A) - y_i(B))^2}{\sum_{i=1}^N Y_i^2}. \quad (22)$$

Якщо вибраний критерій регулярності (21), то вибирають наступний розподіл даних експерименту [8]: $N_A = 0,7N$ і $N_B = 0,3N$, а при виборі критерію (22) - $N_A = 0,5N$ і $N_B = 0,5N$.

Реалізація індуктивного методу самоорганізації моделей здійснюється поетапно: перший етап – генерація моделей-претендентів (у певному порядку підвищення складності); другий етап – відбір найкращої моделі за критерієм селекції (21) або (22).

Розрізняють три способи генерації моделей-претендентів.

Перший із них комбінаторний метод, який вибирає моделі із виразу (11) шляхом порівнювання до нуля деяких його коефіцієнтів. Таким чином, отримуємо сукупність моделей. Вибір найкращої моделі здійснюється на основі одного із критеріїв селекції.

Другий спосіб відомий як метод групового врахування аргументів (МГУА), в якому генерація моделей здійснюється на основі багаторядної процедури. У першому ряду селекції утворюють всі можливі пари аргументів і для кожної із них знаходять часткові моделі, наприклад, у вигляді повного полінома. Із всіх часткових моделей вибирають K найкращих за вибраним критерієм селекції. Із виходів цих K моделей знову утворюють комбінації всіх можливих пар, які є входами моделей другого ряду селекції. Для кожної із цих пар знову формують часткові моделі і т. д. Оцінка коефіцієнтів часткових моделей здійснюється за допомогою МНК. Нарощування рядів селекції відбувається до тих пір, поки основний критерій селекції падає.

Третій метод подібний до другого. Різниця лише у тому, що на кожному ряді селекції часткові моделі утворюють шляхом порівнювання до нуля певного числа їх

коефіцієнтів.

Недоліком комбінаторного методу селекції моделей є необхідність перебору великого числа моделей. Якщо вихідною моделлю вибраний повний поліном степені r , то загальне число моделей-претендентів складає $2^M - 1$, де M - загальне число членів повного полінома степені r . Навіть сучасні ЕОМ не здатні реалізувати такі алгоритми при значній кількості змінних і високій степені полінома. МГУА породжує моделі, у яких фігурують проміжні змінні кожного із рядів селекції, що значно утруднює процес переходу до вхідних змінних системи, що моделюється. Сказане відноситься і до третього методу, оскільки він по суті справи є модифікацією МГУА.

Із усіх трьох методів найпривабливішим є комбінаторний метод, оскільки він дає можливість отримати модель, де аргументами виступають вхідні величини системи. Для зняття проблеми великої розмірності застосуємо генетичний підхід. Як емпіричну модель будемо розглядати поліном (19) степені r . Число членів такого полінома визначається за формулою (15).

При комбінаторному методі синтезу моделі із повного полінома (19) отримують емпіричну модель, де частина параметрів приймає значення нуль. Інші параметри, що залишились, будуть відмінні від нуля. Утворимо упорядковану структуру довжиною M , в якій на i -тому місці буде стояти одиниця або нуль в залежності від того, чи параметр a_i , $i=1, M$ моделі (19) відмінний від нуля, чи нульовий. У теорії генетичних алгоритмів така упорядкована послідовність носить назву хромосоми або особі, а атомарний елемент хромосоми (одиниця або нуль) – це ген. Набір хромосом утворює популяцію. Важливим поняттям у теорії генетичних алгоритмів є функція пристосування, яка визначає ступінь пристосування окремих осіб у популяції. Вона дає змогу із всієї популяції вибрати особі, які є найбільш пристосованими, тобто такі, які мають найбільше (найменше) значення функції пристосування. У задачі синтезу емпіричних моделей функцією пристосованості виступає критерій селекції (21) або (22).

Таким чином, задачу синтезу емпіричної моделі сформуємо наступним чином: із початкової популяції хромосом шляхом еволюційного відбору вибрати таку хромосому, яка забезпечує найкраще значення функції пристосування (мінімальне значення критерію селекції (21) або (22)).

Генетичний алгоритм складається із наступних кроків [10].

K1. Формування початкової популяції (ініціалізація). На першому кроці роботи алгоритму випадковим чином формується популяція із I осіб, кожна із яких є хромосомаю довжиною M . Число генів у хромосомі визначається формулою (15).

K2. Оцінка пристосованості хромосоми у популяції. Для кожної хромосоми обчислюється критерій селекції (21) або (22). Здійснюється така процедура наступним чином. Якщо вибраний критерій селекції (21), то формуються матриці $F_A = F_x^{(A)} - F_\varepsilon^{(A)}$ і $F_B = F_x^{(B)} - F_\varepsilon^{(B)}$ розміром $N_A \times M$ і $N_B \times M$. Із матриці $F_x^{(A)}$ вилучається i -тий стовпець, якщо на i -тій позиції у хромосомі знаходиться нуль; у протилежному випадку i -тий стовпець залишається без змін. Відповідним чином формується матриця $F_\varepsilon^{(A)}$, тобто із неї вилучаються ті ж стовпці, що із матриці $F_x^{(A)}$. У результаті отримаємо матрицю $F_A = F_x^{(A)} - F_\varepsilon^{(A)}$, із якої вилучено c_A стовпців, де c_A - кількість нулів у вибраній хромосомі із початкової популяції. Розмір такої матриці $N_A \times (M - c_A)$. Аналогічним чином формується матриця F_B розміром $N_B \times (M - c_A)$. На множині точок N_A обчислюються ненульові коефіцієнти $a_{A,i}$ моделі (19) шляхом розв'язку нормального рівняння Гауса (18), яке видозміниться наступним чином:

$$\left(M_x^{(A)} + M_\varepsilon^{(A)} - M_{x\varepsilon}^{(A)} - M_{\varepsilon x}^{(A)} \right) \bar{a} = F_A^T \bar{Y}_A, \quad (23)$$

де $M_x^{(A)} = \left(F_x^{(A)} \right)^T F_x^{(A)}$; $M_\varepsilon^{(A)} = \left(F_\varepsilon^{(A)} \right)^T F_\varepsilon^{(A)}$;

$M_{x\varepsilon}^{(A)} = \left(F_x^{(A)} \right)^T F_\varepsilon^{(A)}$ і $M_{\varepsilon x}^{(A)} = \left(F_\varepsilon^{(A)} \right)^T F_x^{(A)}$;

$\bar{a}_A = (a_{A,0}, a_{A,1}, \dots, a_{A, M-c_A-1})^T$ - вектор параметрів моделі, яка асоційована з черговою хромосомаю із початкової популяції; $\bar{Y}_A = (Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(N_A)})^T$ - вектор експериментальних даних на множині точок A .

За відомими коефіцієнтами a_A поліноміальної моделі на множині точок B обчислюють

$$\bar{y}_B = F_B \bar{a}_A. \quad (24)$$

Знаючи \bar{y}_B , за формулою (21) обчислюють функцію пристосування $\Delta^2(B)$ для кожної хромосоми із початкової популяції. У результаті на кроці K2 отримують значення $\Delta_j^2(B)$,

$j = \overline{1, I}$.

У тому випадку, коли використовують критерій селекції (22) як функцію пристосованості, тоді складають рівняння (23), яке методом Гауса розв'язують відносно вектора параметрів \bar{a}_A . Після цього обчислюють $\bar{y}_A = F_A \bar{a}_A$ і \bar{y}_B за формулою (24). Отримані значення \bar{y}_A і \bar{y}_B дають змогу знайти значення $\Delta_j^2(A, B)$, $j = \overline{1, I}$ для кожної хромосоми із початкової популяції.

К3. Перевірка умови зупинки алгоритму. Визначають

$$\Delta^2(B) = \min_j \Delta_j^2(B) \quad (25)$$

або

$$\Delta^2(A, B) = \min_j \Delta_j^2(A, B). \quad (26)$$

Якщо мінімальне значення (25) або (26) критерію селекції (21) або (22) не перевершує деякого додатного значення E_a , то відбувається зупинка алгоритму. Зупинка алгоритму також може відбутися у випадку, коли його виконання не приводить до покращення функції пристосування або у тому випадку, коли алгоритмом уже виконано задане число ітерацій.

Після виконання однієї із трьох умов із популяції вибирається хромосома ch^* , для якої виконується умова (25) або (26). Ця хромосома задає структуру моделі оптимальної складності і формує матрицю $F^* = F_x^* - F_\varepsilon^*$ таким чином, що із початкових матриць F_x^* і F_ε^* вилучаються стовпці, які асоційовані з нульовими генами хромосоми ch^* . Перерахунок параметрів моделі (19) за рівнянням (23) здійснюється на множині всіх точок початкового масиву даних.

К4. Селекція хромосом. За розрахованими на другому кроці значеннями функції пристосування здійснюється відбір тих хромосом, які будуть брати участь в створенні потомків для наступної популяції. Такий вибір проводиться у відповідності з принципом природного відбору, коли найбільші шанси у створенні нової популяції мають хромосоми з найкращим значенням функції пристосування, тобто такі, що забезпечують мінімальне значення критеріїв селекції (21) або (22). Найбільш поширеними методами селекції [11] є метод рулетки і метод турнірної селекції. Метод рулетки може використовуватись тільки у задачах максимізації [11].

Турнірний метод можна використовувати як у задачах максимізації, так і у задачах

мінімізації функцій. При турнірній селекції всі хромосоми розбиваються на підгрупи з наступним вибором із кожної утвореної підгрупи хромосоми з найкращою пристосованістю. Підгрупи можуть мати довільний розмір, але частіше за все популяції ділять на підгрупи по 2 – 3 особи у кожній.

К5. Формування нової популяції потомків здійснюється за допомогою двох основних операторів: схрещування і мутації. Слід відмітити, що оператор мутації відіграє другорядну роль у порівнянні з оператором схрещування. Це означає, що у генетичному алгоритмі схрещування проводиться майже завжди, а мутація – досить рідко. Вірогідність схрещування досить велика ($0,5 \leq P_c \leq 1$), тоді як ймовірність мутації вибирається досить малою ($0 \leq P_m \leq 0,1$)

Оператор мутації з ймовірністю P_m змінює значення гена в хромосомі на протилежне, тобто з 1 на 0 чи з 0 на 1. Ймовірність мутації P_m може емалюватись випадковим вибором числа із інтервалу $[0;1]$ для кожного гена і відбором для виконання цієї операції тих генів, для яких розігране число виявиться меншим аби рівним P_m . Мутація може здійснюватись як над пулом родичів, так і над пулом потомків.

Після виконання оператора схрещування відбувається перехід до К2.

Експериментальна апробація розробленого методу побудови емпіричних моделей здійснювалась на даних, які отримані при експлуатації газоперекачувального агрегату (ГПА) ГТН-6. Спостереження за роботою агрегату велись на протязі січня 2009 р. за допомогою системи автоматизованого управління ГПА.

Технологічні параметри об'єкта (тиск, температура, оберти та ін.) за допомогою сенсорних елементів, розташованих в контрольованих точках ГПА, перетворюються в електричні аналогові сигнали з стандартними характеристиками (4-20 мА, "сухий" контакт та ін.). Ці сигнали надходять до контролерів, де здійснюється їх перетворення у двійкові цифрові коди, які зчитуються та обробляються згідно з заданою програмою. Інформація про роботу ГПА передається від контролерів управління та регулювання по локальній мережі в ЕОМ, яка відтворює відповідні мовні та текстові повідомлення та відображає динаміку процесу на екрані монітора. Відомості про роботу ГПА накопичується на сервері і можуть бути відтворені в будь-який момент часу на екрані ЕОМ або роздрукована у вигляді звіту.

Як приклад розглянемо модель, яка відтворює залежність температури газу на виході із ВЦН від технологічних параметрів – числа оборотів вала нагнітача n_n , температури газу на вході в нагнітач T_{in} , ступені підвищення тиску газу ζ , тиску газу на вході в нагнітач P_{in} , температури T_c та тиску P_c навколишнього середовища

$$T_v = f(n_n, T_{in}, \zeta, P_{in}, T_c, P_c). \quad (27)$$

Вимірювання вказаних технологічних параметрів здійснювалось за допомогою засобів, технічні характеристики яких наведені в табл. 1.

Ступінь підвищення тиску газу визначають за формулою

$$\zeta = \frac{P_{out} + P_a}{P_{in} + P_a}, \quad (28)$$

де P_{out} - тиск на виході нагнітача, МПа; P_a - нормальний атмосферний тиск ($P_a = 0,101\ 325$ МПа).

Знайдемо похибку обчислень ступені підвищення тиску газу за умови, що абсолютні похибки вимірювання P_{out} і P_{in} невеликі. Тоді функцію $\zeta = \varphi(P_{in}, P_{out})$ можна розкрати у ряд Тейлора, обмежившись лише лінійними членами. Абсолютні похибки вимірювання P_{out} і P_{in} визначались із формули приведеної відносно похибки. Тому

$$\Delta\zeta = \frac{\partial\varphi(P_{in}^n, P_{out}^n)}{\partial P_{in}} \Delta P_{in} + \frac{\partial\varphi(P_{in}^n, P_{out}^n)}{\partial P_{out}} \Delta P_{out},$$

де верхні індекси « n » відносяться до величин, які визначають діапазони вимірювань тисків P_{in} і P_{out} ; ΔP_{in} , ΔP_{out} - абсолютні похибки вимірювань тисків P_{in} і P_{out} .

Враховуючи формулу (28), отримаємо

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta P_{out}}{P_{in} + P_a} - \frac{P_{out} + P_a}{(P_{in} + P_a)^2} \Delta P_{in}.$$

Оскільки вимірювання тиску на вході і на виході нагнітача здійснюється однотипними приборами (табл. 1), то $P_{in}^n = P_{out}^n$ та $\Delta P_{in} = \Delta P_{out}$. З врахуванням двох останніх умов матимемо $\Delta\zeta \square 0$.

Одержані результати дають змогу сформулювати вектор похибок вимірювань $\bar{\varepsilon} = (12,8; 0,15; 0; 0,021; 1; 1,5)^T$. Згідно формули (20) компонента $\gamma_{i5}^{(k)}$ вектора $\bar{\gamma}_i^{(k)}$ обчислюється згідно такого виразу:

$$\gamma_{i5}^{(k)} = \frac{z_{i5}}{x_5^{(k)}} \prod_{j=1}^n (x_j^{(k)})^{z_{ij}},$$

де $x_5^{(k)}$ - значення температури навколишнього середовища у k -ому спостереженні.

Якщо $x_5^{(k)} = 0$, то це приводить до того, що $\gamma_{i5}^{(k)} = \infty$. Для запобігання такого випадку температура навколишнього середовища задана у градусах шкали Кельвіна, тобто $t_c = T_c + 273,16$.

Апроксимація результатів спостережень за температурою природного газу на виході нагнітача здійснювалась поліномом (19) степені $r = 4$. ЕОМ формує матрицю показників степені полінома (19) розміром $M \times n$, у якій кількість рядків визначається розмірністю вектора коефіцієнтів \bar{a} моделі (19), а число стовпців дорівнює кількості змінних n . Повне число членів полінома (19) визначається його степеню r і числом змінних n . Для випадку, що розглядається $r = 4$, $n = 6$ і відповідно з виразом (15) $M = 210$.

Таблиця 1 – Технічні характеристики вимірювальних приладів

Вимірювальний параметр	Одиниця вимірювання	Діапазон вимірювань	Абсолютна похибка	Тип приладу
Температура природного газу	°С	0 - 150	0,15	ТСП-1187
Число оборотів нагнітача	об/хв	0 - 6400	12,8	MT4W
Тиск природного газу	МПа	0 - 21	0,021	STG94L
Температура навколишнього середовища	°С	-50 - 150°	1	DM-9258
Атмосферний тиск	мм рт. ст	600 - 800	1,5	БАММ-1

Із даних спостережень формувалась матриця експерименту X наступним чином. Із масиву значень кожного із параметрів n_n , T_m , ζ та P_m формувався стовпець матриці X . Вказані технологічні параметри фіксувались через кожні 5 хв. У залежності (16) крім вказаних технологічних параметрів як аргументи входять температура навколишнього середовища і атмосферний тиск. Ці відсутні дані були взяті із архіву погоди для м. Ромни Сумської області (http://rp5.ua/archive.php?wmo_id=33268&lang=ua), де температура навколишнього середовища і атмосферний тиск зафіксовані через одну годину.

Синхронізація значень температури навколишнього середовища і атмосферного тиску зі значеннями технологічних параметрів, які входять у залежність (16), здійснювалась за допомогою процедури інтерполяції.

У тих випадках, коли кількість вузлів апроксимації є досить великою, то немає змісту використовувати інтерполяційні поліноми Ньютона чи Лагранжа. Доцільніше у такій ситуації використовувати кусково-поліноміальну апроксимацію, яка складається із окремих многочленів невисокої степені і які носять назву сплайнів. Найчастіше використовують кубічний сплайн, який на відрізок часу $[t_k; t_{k+1}]$, $k=1, N-1$ інтерполює дані функції $T_c(t)$ та $P_a(t)$ інтерполяційним поліномом [12] третьої степені.

Знаходження значень температури навколишнього середовища $\tilde{T}_c(t_k)$ та атмосферного тиску $\tilde{P}_c(t_k)$ в моменти часу t_i , які відмінні від вузлів інтерполяції, здійснюється за формулою кубічного сплайна за умови, що $t_{k-1} < t_i < t_k$. Обчислені значення $\tilde{T}_c(t_k)$ і $\tilde{P}_c(t_k)$ поза вузлами інтерполяції і значення цих же величин дозволили сформувати масив вхідних величин, який вмщував 7272 елементи. Із отриманого масиву були виключені нульові значення величин, які зумовлені зупинкою агрегату. У результаті отримали масив значень у вигляді матриці, яка мала розмір 3049x6.

На основі розробленого генетичного алгоритму була отримана залежність (27) у вигляді полінома (19). Були вибрані такі параметри генетичного алгоритму:

- кількість хромосом у популяції – 30;
- кількість хромосом у підгрупі – 4;
- максимальне число ітерацій генетичного алгоритму – 200;

- ймовірність схрещування – 0,9;
- ймовірність мутації – 0,1;
- вибір критерію селекції моделі - критерій регулярності;
- точність розв'язку задачі – 10^{-9} ;
- мінімальний приріст критерію селекції, що визначає зупинку алгоритму – $2 \cdot 10^{-9}$.

Вибір моделі оптимальної складності здійснювався на основі критерію регулярності (21), який використовувався і як критерій селекції для відбору тих хромосом, що брали участь у створенні потомків для наступної популяції.

З використанням розробленої програми синтезовані моделі, які вмщують 117 ненульових і $210-117=93$ нульових параметрів a_i , $i=0, M-1$ полінома (19). Результати роботи програми відтворює рис. 3, де через «○» позначені експериментальні дані, а через «+» - значення температури T_{out} (рис. 2, а), які обчислені як виходи синтезованої моделі.

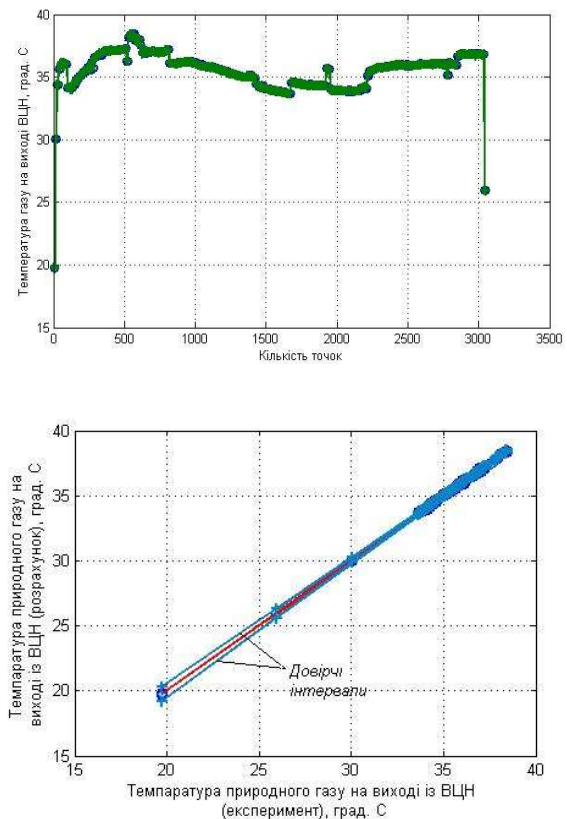


Рисунок 2 – Апроксимація залежності (27) поліномом четвертого порядку та результати перевірки моделі на адекватність

Адекватність отриманої моделі перевірялась за допомогою коефіцієнта кореляції K_{Yy} між експериментальними значеннями $Y_i = T_{out}^{(i)}$ та їх виходами $y_m^{(i)} = T_{out,m}^{(i)}$:

$$K_{T,y} = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(y_m^{(i)} - \bar{y}_m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_m^{(i)} - \bar{y}_m)^2}}, \quad (29)$$

де $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$, $\bar{y}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_m^{(i)}$ - оцінки математичних сподівань для величин Y_i і $y_m^{(i)}$. Було отримано: $K_{T,y} = 0,9995$, що свідчить про високу степінь кореляції між величинами Y_i і $y_m^{(i)}$. Для порівняння за допомогою генетичного алгоритму була синтезована модель (27) у вигляді (19) при допущенні, що технологічні параметри n_n , T_{in} , P_{in} , T_c і P_c вимірювались без похибок. Адекватність такої моделі перевірялась шляхом обчислення коефіцієнта кореляції за формулою (29). У результаті отримали $\tilde{K}_{T,y} = 0,9955$.

ВИСНОВКИ

Врахування похибок вимірювань при синтезі емпіричної моделі незначно покращило точність отриманої моделі. Це свідчить про те, що при існуючих метрологічних характеристиках вимірювальних приладів при побудові емпіричних моделей можна нехтувати похибками вимірювань технологічних параметрів.

1. Ананченко В. Н. Теория измерений: учеб. пособие / В. Н. Ананченко, Л. А. Гофман. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. – 214 с. 2. Прохоров Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – М.: Наука,

1973. – 494 с. 3. Гершилов А. А. Математические методы построения прогнозов / А. А. Гершилов, В. А. Стакун, А. А. Стакун. – М.: Радио и связь, 1997. – 112 с. 4. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. / Д. Химмельблау; пер. с англ. В. Д. Скаржинского. – М.: Мир, 1973. – 957 с. 5. Горбійчук М. І. Індуктивний метод побудови математичних моделей газоперекачувальних агрегатів природного газу / М. І. Горбійчук, М. І. Козуляк, Я. І. Заячук // Нафтова і газова промисловість. – 2008. – № 5. – С. 32 – 35. 6. Горбійчук М. І. Числові методи і моделювання на ЕОМ: навч. посібник / М. І. Горбійчук, Є. П. Пістун. – Івано-Франківськ: Факел, 2010. – 406 с. 7. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента: учебное пособие / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с. 8. Ивахненко А. Г. Справочник по типовым программам моделирования. / А. Г. Ивахненко, Ю. В. Коппа, В. С. Степашко и др.; под ред. А. Г. Ивахненко – К.: Техніка, 1980. – 180 с. 9. Ивахненко А. Г. Індуктивний метод самоорганізації моделей складних систем / А. Г. Ивахненко. – К.: Наукова думка, 1981. – 296 с. 10. Горбійчук М. І. Метод синтезу емпіричних моделей на засадах генетичних алгоритмів / М. І. Горбійчук, М. І. Козуляк, О. Б. Василенко, І. В. Щупак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2009. – № 4(33). – С. 72-79. 11. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский: [пер. с польск. И. Д. Рудинского]. – М.: Горячая линия-Телеком, 2004. – 452 с. 12. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.

Поступила в редакцію 02.11.2011 р.

Рекомендував до друку докт. техн. наук, проф. Семенцов Г. Н.