

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 519.876.5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ГАЗОРІДИННИХ СВЕРДЛОВИННИХ ПОТОКАХ

А. П. Олійник, П. М. Райтер, А. А. Мороз

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;

76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;

тел. +380 (342) 72-38-24; mti@nung.edu.ua

Побудовано математична модель течії в'язкої рідини в трубопроводі та в свердловині для видобутку нафти за наявності перетікання рідини через поверхню та звуження поперечного перерізу, яка базується на системі рівнянь Нав'є – Стокса в двовимірній прямокутній системі координат зі спеціальним типом граничних умов. Враховано просторову конфігурацію зон перетікання. Рух рідини здійснюється під дією постійного перепаду тиску по довжині труби. Для розв'язання задачі використано метод скінчених різниць, розроблено чисельний метод його реалізації – перший крок ітераційного процесу здійснюється по поперечній координаті, другий – по поперечній координаті. Вивчення стійкості проводиться за спектральною ознакою, встановлено умови стійкості для розрахунку течії зі спеціальними параметрами і для заданого типу геометрії труби. Критерії стійкості розрахунків представлено з урахуванням параметрів моделі. Проведено розрахунки для модельних та реальних систем,

Ключові слова: система Нав'є – Стокса, граничні умови, свердловинні потоки, перетікання рідини, чисельний метод, спектральна ознака стійкості.

Построено математическую модель течения вязкой жидкости в трубопроводе и в скважинах для добычи нефти при наличии перетекания жидкости через поверхность и сужения поперечного сечения, основанная на использовании двухмерной системе уравнений Навье – Стокса в прямоугольной системе координат со специальным типом граничных условий. Учтена пространственная конфигурация зон перетекания. Движение жидкости обусловлено постоянным перепадом давления по длине трубы. Для решения задачи используется метод конечных разностей, создан численный метод его реализации – первый шаг итерационного процесса осуществляется по продольной, второй – по поперечной координатах. Изучение устойчивости проводится с использованием спектрального признака устойчивости, установлены условия устойчивости для расчёта течений со специальными параметрами и для данного типа геометрии трубы. Критерии устойчивости представлены с учётом параметров модели. Проведены и проанализированы расчёты для модельных и реальных систем

Ключевые слова: система Навье – Стокса, граничные условия, течения в скважинах, перетекание жидкости, численный метод, спектральный признак устойчивости.

A mathematical model of viscous fluid flow in the pipeline and in the wells for oil extraction with the presence of flow across the surface and the narrowing of pipeline section, which is based on a system of Navier-Stokes equations in two-dimensional rectangular region with a special type of boundary conditions has been designed. The geometric configuration of the leakage zone is taken into the account. It is believed that the fluid motion is under the influence of constant length of pressure difference. For the solving of this system, the numerical method of finite differences was developed by which the finite differences scheme is realized – the first step is implicit in longitudinal coordinate, and the second – on the transversal. The study on the stability of the spectral features method, stability conditions are established for the case of flow calculation with specified parameters and for the given type of the pipeline geometry. The criterion of

numerical stability is presented taking to account the model's parameters. The calculations for the model and real system have been made and analyzed.

Keywords: Navier-Stokes system, boundary conditions, the flowing in the wells low leakage, numerical method, stability, spectrum characteristics of stability

Задача оцінки параметрів течії в свердловинних потоках є актуальною науково технічною задачею, розв'язання якої дозволяє визначити, яким чином витоки та втікання газорідної суміші та координати точок їх розміщення впливають на розподіл швидкостей та тиску в свердловинній колонії, а також оцінити вплив таких витоків на забруднення довкілля шляхом моделювання процесу дифузії речовини в свердловині.

Моделювання процесів такого роду присвячено багато робіт [1,2,8,9,13-15,17-26], проте побудова алгоритмів регуляризації некоректної задачі відновлення фізичних полів за даними про їх параметри на частині досліджуваної області є актуальною задачею.

1. Постановка задачі.

При моделюванні течії в'язкої рідини по циліндричних трубах під дією сили тяжіння в загальній постановці використовується система рівнянь Нав'є-Стокса в циліндричній системі координат [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \nabla v_r - \frac{v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + g_r \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\varphi}{r} \nabla v_\varphi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + g_\varphi \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \nabla v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + g_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

де $\nabla f = \vec{i}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{i}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{i}_z \frac{\partial f}{\partial z}$,

$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ – відповідно оператор градієнта та оператора Лапласа в циліндричній системі координат; g_r, g_φ, g_z – компоненти вектору прискорення земного тяжіння.

Система (1) може бути записана в простішому вигляді за рахунок наступних допущень:

- від тривимірної циліндричної системи координат (1) здійснюється перехід до двовимірної декартової системи – одна з координат вибирається по довжині труби, а інша по її перерізу;

- вивчається поведінка течії в прямокутній області за наявності дефектів, які моделюються у вигляді зон витоків рідини через поверхню труби;

- не враховується тривимірні ефекти – по аналогії з течією Пуазейля, а також не враховується нестационарний характер процесу.

З урахуванням зроблених допущень в двовимірній області система рівнянь записується у вигляді:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Вважається, що $p = p_0 - kx$, k – перепад тиску, з граничними умовами:

$$\begin{cases} u|_{x=0} = -\frac{k y^2}{4\mu} + \frac{k R y}{2\mu} \\ u|_{y=0} = u|_{y=2R} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=2R} = \begin{cases} 0, x \leq x_1, x \geq x_2 \\ \pm V_{\text{вит}}, x \in [x_1, x_2] \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Граничні умови (3) дозволяють враховувати як можливі витоки, так і поступлення суміші в свердловинну колонію. В залежності (3) $[x_1, x_2]$ – відрізок витоків або втоку рідини, можливі довільні конфігурації зон витоків та втоків за довжиною зони та інтенсивністю витоків та втоків; μ – динамічна в'язкість продукту, що транспортується; R – радіус труби, ρ – густина продукту. Вважається, що при $x = 0$ течія рідини по трубі достатньо точно описується моделлю течії Пуазейля [1]; $\mu/\rho = \nu$ – кінематична в'язкість, $V_{\text{вит}}$ – швидкість витоків або втоку рідини через поверхню труби.

1. Різницеві схеми для системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Розв'язання системи (2) з граничними умовами (3) проводиться методом скінченних різниць, для чого вибираються величини Δx - крок по повздожній координаті, Δy - крок по поперечній координаті. Для заміни похідних їх кінцевими аналогами використовуються наступні залежності [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta y}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\Delta x^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Застосовуючи різницеві аналоги похідних (4) до системи (2), одержуються наступні різницеві аналоги рівнянь:

$$\begin{aligned} u_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta y} &= -\frac{1}{\rho} k + v \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + v \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\ u_m^n \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta x} + v_m^n \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2\Delta y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + v \left(\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) - g \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_m^n \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta x} + v_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta y} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + v \left(\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) - g \\ u_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{v_m^n}{2\Delta y} - \frac{v}{\Delta y^2} \right) + u_m^{n+1} \left(\frac{u_m^n}{\Delta x} - \frac{v}{\Delta x^2} + \frac{2v}{\Delta y^2} \right) + u_{m+1}^{n+1} \left(\frac{v_m^{n+1}}{2\Delta y} - \frac{v}{\Delta y^2} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} k + \frac{(u_m^n)^2}{\Delta x} + v \left(\frac{u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\Delta x^2} \right), \\ v_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{v}{\Delta y^2} \right) + v_m^{n+1} \left(\frac{u_m^n}{\Delta x} - \frac{v}{\Delta x^2} + \frac{2v}{\Delta y^2} \right) + v_{m+1}^{n+1} \left(-\frac{v}{\Delta y^2} \right) &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(u_m^n)(v_m^n)}{\Delta x} + v \left(\frac{v_m^{n-1} - 2v_m^n}{\Delta x^2} \right) + v_m^n \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} \right) - g \end{aligned} \quad (6)$$

2. Реалізація обчислюваного алгоритму

Рівняння системи (5) записується у вигляді системи рівнянь з три діагональною матрицею, що дозволяє застосувати метод прогонки для її розв'язання [3]:

Коефіцієнти системи рівнянь з три діагональною матрицею записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} d_m^1 &= -\frac{v_m^n}{2\Delta y} - \frac{v}{\Delta y^2} \\ e_m^1 &= \frac{u_m^n}{\Delta x} - \frac{v}{\Delta x^2} + \frac{2v}{\Delta y^2} \\ f_m^1 &= \frac{v_m^n}{2\Delta y} - \frac{v}{\Delta y^2} \\ b_m^1 &= -\frac{1}{\rho} k + \frac{(u_m^n)^2}{\Delta x} + v \left(\frac{u_m^{n-1} - 2u_m^n}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

– для компонент u ,

$$\begin{aligned} d_m^2 &= -\frac{v}{\Delta y^2} \\ e_m^2 &= \frac{u_m^n}{\Delta x} - \frac{v}{\Delta x^2} + \frac{2v}{\Delta y^2} \\ f_m^2 &= -\frac{v}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$b_m^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(u_m^n)(v_m^n)}{\Delta x} + v \left(\frac{v_m^{n-1} - 2v_m^n}{\Delta x^2} \right) + v_m^n \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} \right) - g$$

– для компонент v .

Необхідно зберігати інформацію про значення u та v на двох шарах по координаті x : $n-1$ та n , значення швидкостей на шарі $n+1$ -

знаходяться в процесі розв'язання задачі. Для запису задачі в більш компактній формі відкидається верхній індекс, після чого одержується:

$$d_m u_{m-1} + e_m u_m + f_m u_{m+1} = b_m \quad (9)$$

Враховуючи стандартне допущення про лінійність залежності між компонентами u_{m-1} та u_m , одержується:

$$\begin{aligned} u_{m-1} &= k_m u_m + L_m \\ d_m k_m u_m + d_m L_m + e_m u_m + f_m u_{m+1} &= b_m \\ u_m &= -\frac{f_m}{d_m k_m + e_m} u_{m+1} \quad (10) \\ k_{m+1} &= \frac{f_m}{d_m k_m + e_m} \\ L_{m+1} &= \frac{b_m - d_m L_m}{d_m k_m + e_m} \end{aligned}$$

Для одержання розв'язку системи (6) з граничними умовами (3) двічі реалізовано метод прогонки, при чому вказана форма запису граничних умов дозволяє врахувати локалізацію місць витоку рідини. Прямий та обернений хід прогонки дозволяє визначити u та v на шарі $n+1$, і після відповідного пере присвоювання значень по шарам алгоритм повторюється. Кількість кроків ітераційного процесу визначається стійкості ітераційної процедури та необхідністю контролю свердловини заданої довжини.

1. Дослідження стійкості різницевої схеми.

Дослідження стійкості різницевої схеми проводиться зв спектральною ознакою стійкості [3,4, 10-12, 16, 20, 22]. Оскільки два перші рівняння системи (5) практично однакові, дослідження стійкості проводиться лише для першого рівняння. Особливістю використання спектральної ознаки є те, що система рівнянь Нав'є-Стокса є нелінійною, тому необхідним є використання принципу заморожених коефіцієнтів, згідно з яким коефіцієнти системи (5) приймаються сталими. При реалізації методу заморожених коефіцієнтів компонента u_m^n записується у вигляді:

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\varphi}. \quad (11)$$

Умова стійкості різницевої схеми записується у вигляді: $|\lambda| \leq 1$.

Для першого рівняння системи (5):

$$\begin{aligned} u_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \\ -v \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + \end{aligned}$$

$$v \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right),$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = p, u_m^n \approx U = A$$

вводячи позначення

$$\frac{v_m^n}{2} \approx V = B; \frac{v}{\Delta x} = C \quad (12)$$

досліджуване рівняння набуває вигляду:

$$\begin{aligned} A(u_m^{n+1} - u_m^n) + Bp(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) = \\ C(u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}) + \\ p^2(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}). \end{aligned}$$

Введення характерних величин (12) дозволяє проводити вибір таких параметрів обчислювальної сітки, які забезпечують стійкість обчислюваної схеми. З урахуванням (11) та формули Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ одержується:

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 - \lambda) - 2Bp\lambda^2 i \sin \varphi = \\ = C(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4p^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (13) \end{aligned}$$

Рівняння (13) є квадратним рівнянням з комплексними коефіцієнтами. Його корені визначаються співвідношенням:

$$\lambda_1 = \frac{A-2C + \sqrt{A^2 - 8BCp i \sin \varphi + 4Cp^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2(A-2Bp i \sin \varphi - C + 4p^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})}, \quad (14)$$

$$\lambda_2 = \frac{A-2C - \sqrt{A^2 - 8BCp i \sin \varphi + 4Cp^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2(A-2Bp i \sin \varphi - C + 4p^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2})}. \quad (15)$$

В загальному випадку перевірка умов $|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1$ вимагає знаходження величин $Re\lambda_1, Re\lambda_2, Im\lambda_1, Im\lambda_2$ та перевірки виконання умов:

$$\begin{aligned} \sqrt{(Re\lambda_1)^2 + (Im\lambda_1)^2} \leq 1, \\ \sqrt{(Re\lambda_2)^2 + (Im\lambda_2)^2} \leq 1, \quad (16) \end{aligned}$$

що вимагає складних математичних викладок. Проте в даному випадку дослідження виконання умов (16) проводиться з урахуванням характеристик величин процесу, а саме:

$$B \approx 0, C \approx 10^{-5}, A \approx 1. \quad (17)$$

З рівняння (14) та нерівності (16) в таких допущеннях витікає нерівність

$$(16 - \varepsilon)p^2 + 64p^4 \geq 0, \quad (18)$$

а з (15), (16) одержується

$$-\sqrt{1 + \varepsilon p^2} \leq 1 + 8p^2, \quad (19)$$

при цьому $\varepsilon \approx 10^{-5}$. Очевидно, що вказані нерівності виконуються при всіх значеннях p .

При великих значеннях швидкості витікання рідини різницева схема вимагає особливого дослідження, причому не лише з точки зору забезпечення стійкості розрахунків – необхідно перевірити саму адекватність моделі (2) – (3) та її відповідність фізичній картині процесу. При розв'язанні задачі дослідження течії, для яких виконуються умови (17), (18) та (19), параметри розрахункової сітки вибираються з урахуванням вимог необхідної точності розрахунків.

2. Числові характеристики процесу.

Моделювання течії в свердловині з дефектами, через які відбувається відтік рідини, проводиться для наступних параметрів течії, геометрії свердловини, властивостей рідин та газів, лінійного перепаду тиску по довжині труби:

Середня швидкість рідини в трубопроводі – 2-8 м/с

Характерна швидкість малого витoku – до 50 см/с

Динамічна в'язкість рідини (вода) – 0,001 кг/см

Кінетична в'язкість – 0,000001 м.кв./сек, проте вона може бути зміненою згідно з інформацією про в'язкість багатокomпонентної рідини, що видобувається.

Характеристика перепаду тиску $K=0,064-0,096$

Крок по повздожній координаті – 0,08 м

Крок по поперечній координаті визначається геометричними характеристиками свердловини.

3. Результати, обговорення, коментарі.

Розроблена методика чисельного розв'язання системи (2) з розривними граничними умовами (3) реалізована у вигляді комплексу програм для ПЕОМ, проведено комплекс розрахунків, які виявили наступні особливості модельованого процесу та його чисельної реалізації:

- при розрахунку поля швидкостей в свердловині без дефектів поперечна компонента швидкості відсутня, при цьому течія рідини в

свердловині характеризується лише одним компонентом швидкості – поперечною. На рис.1 представлена залежність максимальної та середньої швидкості течії рідини в трубі за відсутності дефектів.

Одержаний числовий розв'язок задачі відрізняється від класичного результату розв'язання задачі Пуазейля, оскільки при розв'язанні задачі про течію Пуазейля вважається, що профіль швидкості не залежить від повздожньої координати. Одержані числові результати розв'язання системи (2) з граничними умовами (3) показують, що значення швидкості залежить від повздожньої координати, що відповідає реальній технологічній ситуації – величина перепаду тиску в свердловині повинна бути сталою – це дозволяє підтримувати певну величину видобутку.

На рис. 2 наведено результати моделювання течії газорідинної суміші за наявності витоків та втоків газу рідин, ці процеси відрізняються як за розподілом градієнту, так і за загальним розподілом швидкості в свердловині, отже, і за продуктивністю.

При розробці практичних методик для розрахунку течії в газорідинних свердловинних потоках необхідно провести дослідження впливу на його точність параметрів різницевої схеми, а саме кроків по повздожній та поперечній координатах, а також провести дослідження поведінки розв'язків при різних значеннях числових характеристик процесу, наведених в п.2, що дозволить визначити область практичного застосування пропонованої моделі з точки зору геометричних розмірів об'єктів, типу рідин, що протікають по системі, а також скоротити час розрахунку одного з варіантів задачі, що є особливо важливим при оптимізації моделі за критерієм її найкращої відповідності реальній фізичній картині процесу. Важливим питанням залишається встановлення меж застосування пропонованої двовимірної моделі для опису суттєво тривимірних реальних досліджуваних систем.

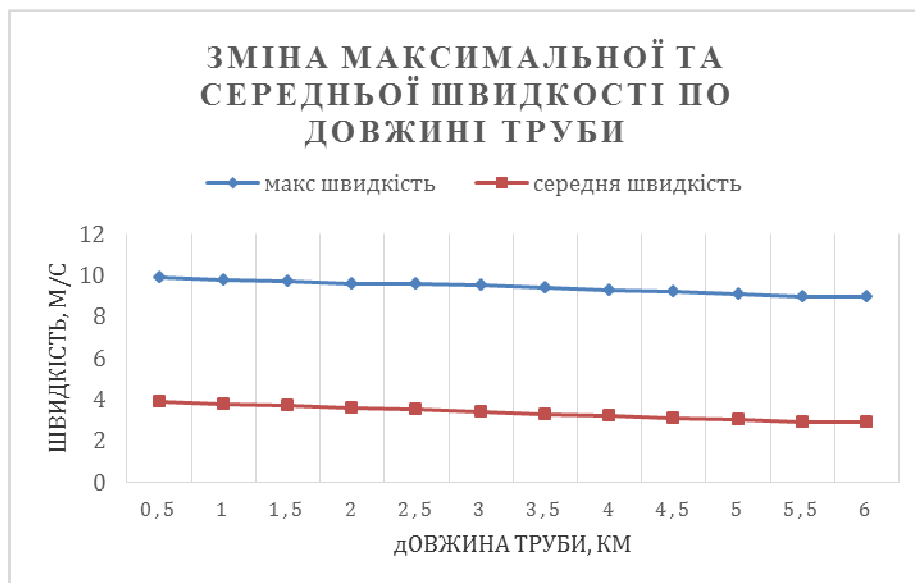


Рисунок 1 – Розподіл максимальної та середньої швидкості рідини по довжині труби за відсутності дефекту.

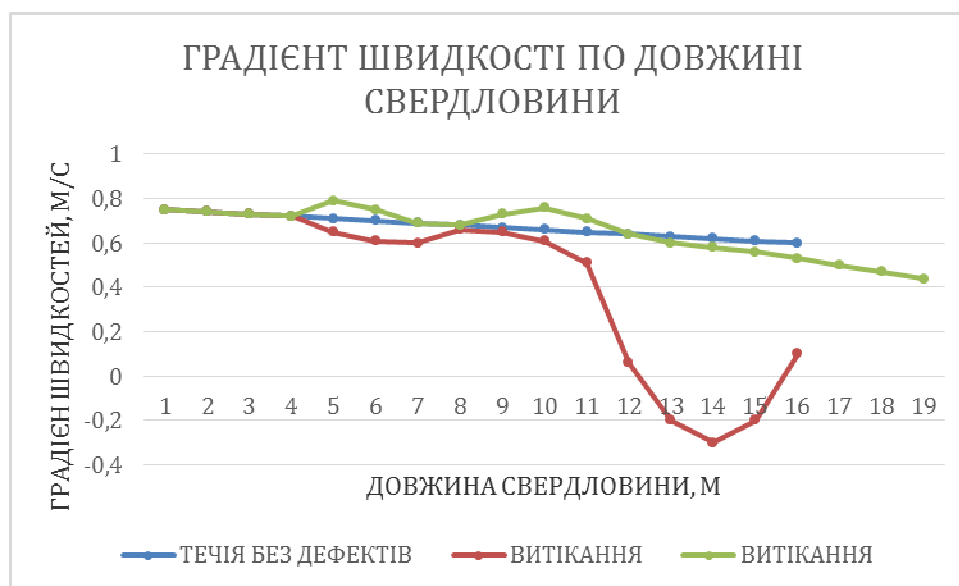


Рисунок 2 – Розподіл градієнта швидкості по довжині свердловини при витіканні – витіканні рідини зі свердловини.

1. Архипов, Б. В. Применение математических методов для анализа и оценки экологически значимых событий при крупномасштабной аварии подводного газопровода / Б. В. Архипов и др.; отв. ред. А. П. Абрамов. – Москва: Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской акад. наук, 2007.–74с. 2. Шкадов, В. Я. Течения вязкой жидкости / В. Я. Шкадов, З. Д. Запранов. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с. 3. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер // М.: Мир. – 1990. – Т. 1. – 384 с. 4. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики. - /В. Ф. Дьяченко. - М.: Наука, 1977. – 128 с. 5. Олейник, О. А. Математические методы в теории пограничного слоя [Текст] / О. А. Олейник, В. Н.Самохин. – М.: Физмат- лит, 1997. – 512 с. 6. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. - /Б. Е. Победря - М.: Изд-во МГУ. 1995. – 366 с.7. Георгиевский, Д. В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел / Д. В. Георгиевский. – М.: УРСС, 1998. – 176 с. 8. Едигаров, А. С. Математическое моделирование аварийного истечения и рассеивания природного газа при разрыве газопровода / А. С. Едигаров, В. А. Сулейманов // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 4. – С. 37–52. 9. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. - / О.М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1994. – 442 с. 10. Годунов С.К. Разностные схемы. - / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с. 11. Краснощеков П.С. Принципы построения моделей. - / П. С. Краснощеков, А. А. Петров – М.: Изд во МГУ, 1983. – 264 С. 12. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем. / А. А. Самарский, А. В. Гулин – М.: Наука, 1973. – 416 с. 13. Brodetsky I., Savic M. 1993, “Leak monitoring system for gas pipelines”, *Acoustics, Speech, and Signal.*, 1992, “Instabilities in viscoelastic flows”, *Rheol Acta*, v.31, no. 3, pp. 213- 263. 14. Brunone B., Ferrante M., 2001, “Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients”, *Journal of hydraulic research*, vol. 39, no. 4, pp. 1–6. 15. Drazin P.G., Reid W.H., 1981, *Hydrodynamical stability*, Cambridge University Press, Cambridge. 16. Олійник А. П. Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність

чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле / А. П. Олійник, Л. О. Штаєр // Карпатські математичні публікації – т.4, №2,2012 – 289-297с. 17. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи, методы, примеры. - / А.А. Самарский, А. П. Михайлов/ 2-е изд. испр. – М.: Физматлит, - 2005 – 320 с. 18. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник/ В.В. Клюев, Р.Ф. Соснин и др. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 2003 – 656 с. 19. Мазур И. И. Безопасность трубопроводных систем/ И.И. Мазур, О.М. Иванцов – М.:ИИЦ «Елима», 2004 – 1104 с. 20. Дослідження стійкості течії з малими збуреннями та умов виникнення турбулентності. - / А.П.Олійник, Р.Б.Скрипюк, В.Б.Шеремета // Східно-Європейський журнал передових технологій. – том 2, №7 (68), 2014 – ст.36-41. 21. Селезнев В.Е. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем / В.Е.Селезнев, В.В.Алешин, Г.С.Клишин. – М.:Едиториал УРСС, 2002. – 448 с. 22. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н.Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 285 с. 23. Pat. 5205173 United State, Int. Cl. G 01 M 003/00. Method and apparatus for detecting leaks in pipelines using cross-correlation techniques / Allen, Trevor J. – Application No. 718746; filed on 21.06.91; issued on 27.04.93. 24. Pat. 6668619 United State, Int. Cl. G 01 M 3/24. Pattern matching for real time leak detection and location in pipelines / Yang B.-W., Recane M. – Application No. 10/146745; filed on 15.05.02; issued on 30.12.03. 25. Pat. 5361636 United State, Int. Cl. G 01M 003/24. Apparatus and process for measuring the magnitude of leaks / Farstad Jerry E., Cremean Stephen P. – Application No. 9 48597; filed on 23.09.92; issued on 08.11.94. 26. Pat. 5349568 United State, Int. Cl. G 01 S 003/80, G 01 M 003/00. Leak locating microphone, method and system for locating fluid leaks in pipes / Kupperman D. S., Spevak L. – Application No. 127742 ; filed on 27.09.93 ; issued on 20.09.94.

Поступила в редакцію 10.11.2016 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук,
проф. Горбійчук М.І., докт. техн. наук, проф.
Заміховський Л.М.