

УДК 681.883:534.112

СПОСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАТУХАЮЧИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

*Ю. Й. Стрілецький*¹, Р. Б. Дунець²*

¹ – Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська, 15, м.Івано-Франківськ, 76019, @i.ua

² – Львівська політехніка, вул. Ст. Бандери 28а, 79013, Львів, roman.b.dunets@lpnu.ua

Розроблено спосіб дослідження вільних коливань механічних систем на основі ітераційного підбору частоти і коефіцієнта затухання лінійної моделі гармонійного коливання, параметри якої шукаються шляхом апроксимації. Розроблено алгоритми обробки даних які дозволяють проводити декомпозицію сумарного коливання на частотні складові, які утворені модами коливальної системи. Запропоновані алгоритми обробки дозволяють збільшити інформативність дослідження вільних коливань механічних коливальних систем і можуть застосовуватись при розробці нових методів неруйнівного контролю.

Ключові слова: затухаючі коливання, метод найменших квадратів, лінійна регресійна модель, апроксимація, ітерація, метод золотого перерізу.

Разработан способ исследования свободных колебаний механических систем на основе итерационного подбора частоты и коэффициента затухания линейной модели гармонического колебания, параметры которой ищутся путем аппроксимации. Разработаны алгоритмы обработки данных, которые позволяют проводить декомпозицию суммарного колебания на частотные составляющие, образованные модами колебательной системы. Предложенные алгоритмы обработки позволяют увеличить информативность исследования свободных колебаний механических колебательных систем и могут применяться при разработке новых методов неразрушающего контроля.

Ключевые слова: затухающие колебания, метод наименьших квадратов, линейная регрессионная модель, аппроксимация, итерация, метод золотого сечения.

The method of study of free oscillations of mechanical systems on the basis of the iterative selection the frequency and the coefficient of attenuation of a linear model of harmonic oscillation, the parameters of which are searched by approximation, are developed. The algorithms of data processing are developed which allow to make a decomposition of the total oscillation on the frequency components, which are formed by modes of the oscillatory system. The proposed algorithms of processing allow to increase the informativeness of the study of free oscillations of mechanical vibrational systems and can be used in the development of new methods of non-destructive testing.

Keywords: fading oscillations, least squares method, linear regression model, approximation, iteration, golden section method.

Вступ. Всі технологічні об'єкти потрапляючи під вплив сторонніх сил деформуються. Процес деформації часто пов'язаний із коливними процесами, які виникають при взаємо перетворенні енергії деформації із потенційної в кінетичну. В залежності від типу силового поля коливання супроводжують механічні, електромагнітні,

хімічні, термодинамічні та інші системи. Незважаючи на це всі вони мають між собою багато спільного і тому описуються одними і тими ж диференціальними рівняннями. Такі рівняння описують зв'язок між параметрами власних коливань і внутрішнім станом вибраної системи. Аналізуючи коливання можна встановити стан системи.

Дослідження параметрів коливань широко використовується при неруйнівному контролі деталей і вузлів. Практично всі види неруйнівного контролю використовують той чи інший вид коливних процесів для виділення інформації про стан контрольованого об'єкту. Тому розробка нових способів аналізу коливальних процесів є актуальною задачею.

Огляд літературних джерел. Аналіз перехідних процесів при коливаннях механічних систем проводиться за допомогою перетворень Лапласа, Фур'є. Широко відомі і розвиваються методи вейвлет аналізу[1]. Такі методи обробки застосовуються для обробки даних різних типів. Вони є універсальними і тому не дають можливості точно визначити певні параметри, притаманні цільовим дослідженням.

Для дослідження затримки проходження імпульсів по середовищу використовуються методи виділення огинаючої форми сигналу за допомогою перетворення Гільберта [2]. Однак такі дослідження не дозволяють визначати параметри імпульсних сигналів роздільно для кожної моди.

Також властивості середовища досліджують сімейством збуджуючих сигналів із нелінійною зміною частоти [3, 4]. При цьому передбачається, що для дослідження параметрів середовища можна створити сигнали будь-якої форми. Тому для механічних систем вказані методи мають обмежене застосування.

Метою дослідження є розробка алгоритмів цифрової обробки результатів спостереження за вільними коливаннями, які виникають в механічних коливальних системах після їх ударного збудження. В результаті обробки дискретизованих даних визначається частоти власних коливань і коефіцієнти їх затухання.

Викладення основного матеріалу Одним із поширених і простих у виконання видів збудження механічної системи є імпульсне збудження ударом. Передбачається, що вимушуюча сила діє короткий проміжок часу і в загальному випадку формує множину механічних сил із широким частотним спектром. При такому збудженні в коливальну систему поступає енергія, яка виводить її із стану рівноваги. Коливний процес супроводжується взаємним перетіканням енергії, що можна спостерігати по переміщенню елементів системи, чи по аналізу їх швидкості.

Після припинення дії вимушуючої сили коливання здійснюються на частоті власних коливань системи і в цей час вони несуть в собі інформацію про стан коливальної системи.

Вільні коливання механічної системи в реальних умовах проходять із втратами, пов'язаними із різноманітними явищами. В більшості випадків величина втрат пропорційна швидкості переміщення елементів системи. Рівняння руху простої коливальної системи вздовж осі X залежно від часу t має наступний вид [5]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (1)$$

де m - коефіцієнт інерції елемента, який приймає участь в коливанні і описує здатність накопичувати потенційну енергію системи; c - жорсткість елемента системи, яка описує здатність вивільняти потенційну енергію в кінетичну; r - втрати в системі. Для пошуку розв'язку (1) використовується характеристичне рівняння [6]:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + k^2 = 0, \quad (2)$$

де $2 \cdot \delta = \frac{r}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$. Корені рівняння (2)

можна визначити наступним чином:

$$x_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - k^2}.$$

В залежності від співвідношення n і k можуть бути три різних випадки. При малих затуваннях коли $n < k$ рух буде описуватися рівнянням:

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\sqrt{k^2 - \delta^2} t + \beta) \quad (3)$$

де A і β - амплітуда і фаза коливання в момент припинення дії зовнішньої сили, $\sqrt{k^2 - \delta^2} = \omega$ - частота власних коливань системи, δ - коефіцієнт затування амплітуди коливань. Вид таких коливань наведено на рис.1. Інші співвідношення між n і k призводять до появи аперіодичних видів руху системи в даному випадку не розглядаються і досліджуються іншими способами.

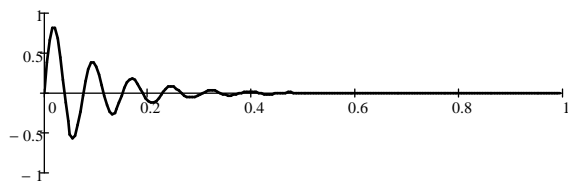


Рисунок 1– Приклад затухаючого коливання

Параметри коливання перетворюються в електричний сигнал. Для механічних коливань зручно використовувати вимірювання функції швидкості. Перетворення швидкості в електричний сигнал можна здійснити за допомогою індуктивного датчика і намагніченого елементу коливальної системи. Після перетворення швидкості переміщення досліджуваного елементу коливальної системи в електричний сигнал цей сигнал дискретизується для подальшої цифрової обробки.

Для пошуку частоти коливання системи застосовується дискретне перетворення Фурє. Однак амплітуда коливання постійно міняється. При цьому в спектрі сигналу появляються додаткові частотні складові. Добуток гармонійної функції і експоненціальної призводить до того, що в частотній області їх спектри згортаються. Перетворення Фурє експоненціальної функції має наступний вид [7]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\delta + j\omega}, \quad (4)$$

Результуючий спектр затухаючого коливання

$$S(\omega) = \frac{1}{\delta + j\omega} * \Delta(\omega - \omega_Z), \quad (5)$$

де $\Delta(\cdot)$ - функція Дірака. При зростанні затухання δ розширюється результуючий спектр сигналу. Розширення спектральних складових, пов'язаних із затухаючими коливаннями утруднює точне визначення їх частоти. Додатково складно визначити частоту коливання через дискретність спектральної оцінки, яку забезпечує дискретне перетворення Фур'є. При дискретизації гармонійного сигналу на частоті ω_Z він впливає на всі дискретні спектральні складові сигналу. Цей вплив можна оцінити за формулою:

$$S_n = \sin c \left(\frac{\omega_n - \omega_Z}{2} \right) \cdot S(\omega_Z), \quad (6)$$

де $S(\omega_Z)$ - амплітуда вибраної спектральної складової сигналу.

Функція sinc, яка зважає спектральні складові рівна 1 тільки при аргументі 0 і рівна 0 при аргументі $2\pi n$. Тому, якщо ω_Z буде рівна одній із дискретних гармонік ($\omega_n = 2\pi n$), то на цій гармоніці вона буде представлена правильною амплітудою, а на всіх інших гармоніках буде нульовою. Такий випадок можна спостерігати на рис.2.

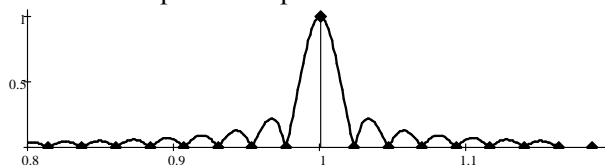


Рисунок 2– Спектр гармонійного коливання при співпадінні його частоти із однією із гармонік дискретного перетворення Фур'є

Якщо частота ω_Z не потрапляє в одну із гармонік, то на всіх гармоніках в тій чи іншій мірі буде проявлятися наявність гармонійного коливання. Це можна побачити на прикладі рис.3.

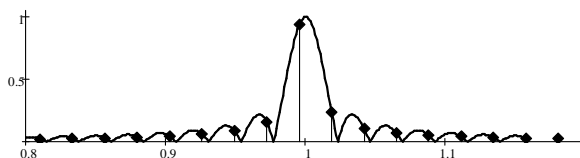


Рисунок 3– Спектр гармонійного коливання за умови неспівпадіння його частоти з гармонікою дискретного перетворення

Зростання амплітуд сусідніх спектральних складових при некратності частот сигналу і дискретної гармоніки називають витіканням спектру. Для оцінки частотних властивостей сигналу в такому випадку використовуються різноманітні віконні функції [8, 9], які видозмінюють спектр таким чином, щоб зменшити вплив частоти коливання при віддаленні значення ω_Z від її реального положення. Тому дискретний спектр можна використати тільки для попереднього встановлення положення частоти коливання на частотній осі. Подальший пошук частоти коливання проводиться за допомогою лінійної регресійної моделі гармонійного коливання і

апроксимації методом найменших квадратів [10]. Лінійну модель гармонійного коливання можна записати наступним чином:

$$s(t) = K_0 + K_1 \sin(\omega_K t) + K_2 \cos(\omega_K t), \quad (7)$$

де K_0 , K_1 , K_2 - коефіцієнти моделі, ω_K - частота налаштування моделі. За допомогою методу найменших квадратів можна підібрати коефіцієнти моделі, так щоб вона максимально близько описувала набір дискретних даних. Однак для цього необхідно знати частоту сигналу. В даному алгоритмі обробки частота шукається числовим методом. Як видно із рис.3 спектральна щільність гармонійного сигналу має максимум на своїй частоті. Тому в якості параметру числового підбору частоти ω_K вибрано амплітуду сигналу, яка шукається за формулою:

$$A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}. \quad (8)$$

Залежність амплітуди A від частоти ω_K моделі буде мати максимум при $\omega_K \approx \omega_Z$. Числовий підбір здійснюється методом золотого перерізу. Цим методом шукається положення максимуму функції $A(\omega_K)$. Кожне значення $A(\omega_K)$ шукається із набору дискретних даних. Межі пошуку задаються із попереднього аналізу дискретного спектру.

Для пошуку амплітуди спектральної складової на заданій частоті ω_M , яка задається раціональним числом і не пов'язана із дискретними гармоніками використовується оператор:

$$A(f, s, N, T) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..N-1 \\ \left| \begin{array}{l} x_{j,0} \leftarrow 1 \\ x_{j,1} \leftarrow \sin\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{j}{N} \cdot T\right) \\ x_{j,2} \leftarrow \cos\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{j}{N} \cdot T\right) \end{array} \right. ; \quad (9) \\ K \leftarrow \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_{j,1}^2 + x_{j,2}^2 \right)^{-1} \cdot T \cdot s \\ \sqrt{(K_1)^2 + (K_2)^2} \end{cases}$$

де f частота моделі, s - масив дискретизованих даних, N - кількість точок масиву

дискретизованих даних, T - період дискретизації масиву даних.

Цей оператор спочатку формує матрицю пояснюючих коефіцієнтів із гармонійного коливання. Після цього шукає коефіцієнти регресійної моделі апроксимуючись до вхідного набору s . Амплітуда коливання на заданій частоті шукається геометричною сумою двох коефіцієнтів моделі.

Метод золотого перерізу передбачає поступове звуження діапазону пошуку аргументу до такого значення при якому різниця між границями цього діапазону стане меншою за заданий коефіцієнт.

Для пошуку такого значення частоти при якому амплітуда коливання в заданому діапазоні буде максимальною, використовується наступний оператор:

$$f(a, b, ee, N, s, T) := \begin{cases} \text{while } |b - a| > ee \\ \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow b - \frac{(b-a)}{F} \\ x2 \leftarrow a + \frac{(b-a)}{F} \\ y1 \leftarrow A(x1, s, N, T) \\ y2 \leftarrow A(x2, s, N, T) \\ a \leftarrow x1 \text{ if } y1 \leq y2 \\ b \leftarrow x2 \text{ otherwise} \end{array} \right. ; \quad (10) \\ \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

де a і b - границі діапазону пошуку частоти, які визначаються із дискретного спектру, ee - задана точність пошуку, F - пропорція золотого перерізу, яка визначається такою формулою

$$F = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Точність пошуку частоти яка задається ee визначається точністю дискретизації і кількістю точок дискретизації. Таким чином шукається частота затухаючого сигналу.

Використовуючи наведений алгоритм знайдено частоту коливання, сигнал якого наведено на рис.1. і описується (3). Амплітуда коливання $A=1$, частота $\omega_Z = 13.2$ Гц, затухання $\delta = 10$.

Як вже зазначалося через затухаючий вигляд амплітуди спектральна щільність знайдена за допомогою дискретного

перетворення Фур'є не описує параметри процесу. Спектральну щільність затухаючого колювання в порівнянні із дискретним представленням на частоті ω_Z наведено на рис.4.

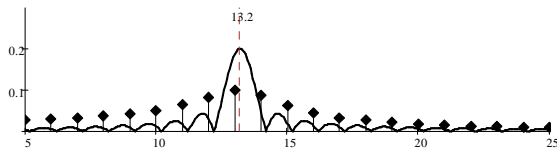


Рисунок 4– Дискретна спектральна щільність затухаючого колювання

Як видно з наведеного графіку дискретна спектральна щільність в околі частоти колювання є доволі пологою і не точно потрапляє в частоту. Основна гармоніка дискретного перетворення Фур'є становить 1Гц.

За допомогою розробленого алгоритму, який реалізує оператор (8) вдалося визначити частоту на значенні 13.106Гц при $e = 0,001$. Відхилення частоти пов'язане із впливом експоненціальної форми огинаючої.

Подальший аналіз передбачає пошук затухання колювання. Затухання можна знайти різними способами. Якщо колювання не має сторонніх завад, то можна відновити огинаючу амплітуду і за допомогою апроксимації знайти параметри експоненціальної функції. Так само можна аналізувати швидкість зменшення амплітуди від періоду до періоду. За наявності сторонніх завад чи інших спектральних складових в сигналі такі способи пошуку коефіцієнта затухання призведуть до значної похибки.

При відомій формі затухання її можна відтворити за допомогою числового підбору коефіцієнта затухання при розрахунку матриці пояснюючих коефіцієнтів.

Умовою правильності підбору коефіцієнта затухання сигналу є зменшення різниці між вхідними дискретизованими даними і відтвореною моделлю. Тобто будується модель сигналу із врахуванням його затухаючої форми і шукається сума відхилень вхідних даних від моделі. Оператор, який здійснює пошук суми відхилень дискретизованих даних від відтвореної моделі

$$D(f, s, N, \delta, T) := \begin{cases} \text{for } j \in 0..N-1 \\ x_{j,0} \leftarrow 1 \\ x_{j,1} \leftarrow \sin\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{j}{N} \cdot T\right) \cdot e^{-\delta \cdot \frac{j}{N}} \\ x_{j,2} \leftarrow \cos\left(2\pi \cdot f \cdot \frac{j}{N} \cdot T\right) \cdot e^{-\delta \cdot \frac{j}{N}} \end{cases}; \quad (11)$$

$$K \leftarrow \begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}^{-1} \cdot x^T \cdot s$$

$$\text{for } j \in 0..N-1$$

$$g_j \leftarrow x_{j,0} \cdot K_0 + x_{j,1} \cdot K_1 + x_{j,2} \cdot K_2$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} (s_j - g_j)$$

Параметрами оператора є коефіцієнт затухання і масив дискретизованих вхідних даних. Як і в попередньому випадку спочатку будується матриця пояснюючих коефіцієнтів X , за якими шукаються коефіцієнти моделі K . Далі шукається масив даних відтворений побудованою моделлю g . Після чого шукається сума відхилень вхідних даних від побудованої моделі.

Залежність відхилення моделі від вхідних даних наведено на рис. 5

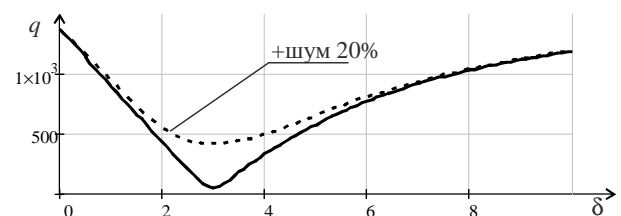


Рисунок 5 – Залежність відхилення моделі від вхідних даних для різних коефіцієнтів затухання

На рис наведено дані для випадку чистого сигналу (суцільна лінія) і зашумленого рівномірним шумом із амплітудою 20% від початкової амплітуди затухаючого колювання (штрихова лінія). Із наведеного видно, що функція відхилення $q(\delta, s)$ має мінімум на певному значенні коефіцієнта затухання δ .

Для пошуку мінімуму функції $q(\delta, s)$ можна скористатися ітераційним методом залотого перерізу. Оператор такого пошуку наступний

$$Z(a, b, N, f, s, T) := \begin{cases} \text{while } |b - a| > \epsilon \\ \quad x1 \leftarrow b - \frac{(b - a)}{F} \\ \quad x2 \leftarrow a + \frac{(b - a)}{F} \\ \quad y1 \leftarrow Df, s, N, x1, T; \\ \quad y2 \leftarrow Df, s, N, x2, T \\ \quad a \leftarrow x1 \text{ if } y1 \geq y2 \\ \quad b \leftarrow x2 \text{ otherwise} \\ \quad \frac{a + b}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Наведені алгоритми обробки сигналів дозволяють проводити визначення параметрів затухаючих сигналів при дії сторонніх сигналів як випадкових так і гармонійних.

З метою перевірки здатності визначення параметрів затухаючого сигналу в суміші сторонніх завад було генеровано сигнал за формулою

$$x(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega_Z t) + \sin(\omega_{ADD} t) + n(t),$$

де ω_{ADD} - частота завади, $n(t)$ - шумоподібний сигнал із рівномірним законом розподілу в діапазоні від -0,2 до 0,2. Після представлення цього сигналу в дискретній формі було здійснено розрахунок частоти ω_Z і δ .

Для виділення діапазону частот в межах якого буде шукатися частота затухаючого сигналу було виділено здійснено дискретне перетворення Фур'є. Їх результати наведено на рис.6.

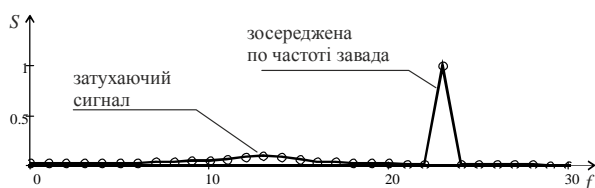


Рисунок 6– Спектральна щільність дискретного спектру досліджуваного сигналу.

Виділивши потрібну смугу частот подальші розрахунки здійснювалися згідно (10) і (12). Результати розрахунку використано для відновлення форми затухаючого коливання. Графічне представлення відтвореної форми затухаючого коливання і зашумлений сигнал наведено на рис.6.

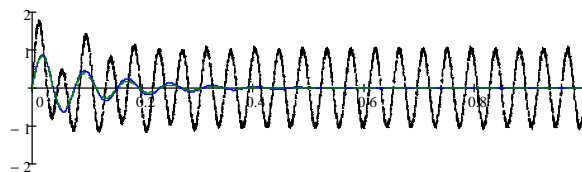


Рисунок 7– Приклад зашумленого сигналу і відтвореного за визначеними параметрами.

Із наведеного графіку видно, що відновлений за результатами розрахунку затухаючий сигнал по формі співпадає із вихідним, форма якого наведена на рис.1.

Наведені результати дослідження форми дискретної спектральної щільності затухаючого сигналу, знайдені за допомогою дискретного перетворення Фур'є показують їх малу інформативність і низьку точність у порівнянні із запропонованим алгоритмом обробки.

Для реалізації досліджень властивостей матеріалів, які можна здійснити за допомогою оцінки затухань механічних коливань, розроблено пристрій. Структурну схему його зображено на рис.7.

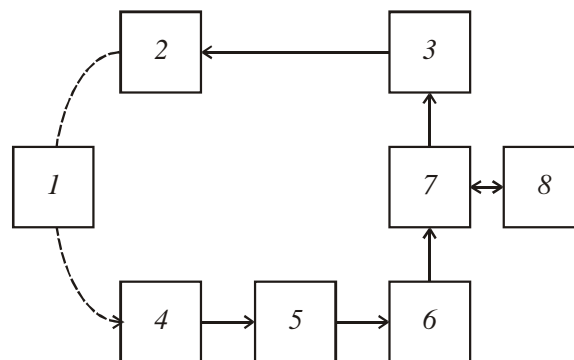


Рисунок 7- Структурна схема пристрою для аналізу параметрів затухаючих коливань.

На схемі досліджуваний механічний об'єкт 1 збуджується імпульсним випромінювачем 2. Керування імпульсним випромінювачем здійснюється ключовим формувачем 3. Механічні коливання, які утворилися в 1 без подальшого підтримання будуть затухати. Затухаючі механічні коливання передуюються в електричний сигнал перетворюючим пристроєм 4. Після узгоджуючого підсилення блоком 5, сигнал потрапляє на аналого-цифровий перетворювач 6 із великим динамічним діапазоном. Роботою всього пристрою керує мікропроцесорний блок 7, який формує сигнал збудження і здійснює запис та

обробку дискретизованих значень. Результати обробки відображаються на екрані чи передаються для подальшого зберігання інтерфейсним блоком 8.

Розроблений спосіб і пристрій дозволяють проводити оперативне дослідження затухання коливань, які пов'язані із механічними властивостями об'єкта та структурою матеріалу із якого він виготовлений. Це дає можливість оперативно і чисельно оцінювати один із чинників технічного стану об'єктів.

Висновки. Для визначення частоти власних коливань і його коефіцієнта затухання, представленого набором дискретизованих значень, запропоновано використовувати ітераційний метод пошуку екстремумів функції, яка будується на основі апроксимації лінійної регресійної моделі гармонійного коливання. Запропоновані алгоритми пошуку дозволяють підвищити точність визначення частоти власних коливань в межах вибраної частотної смуги і знайти числове значення коефіцієнта затухання коливання за наявності в досліджуваному сигналі сторонніх завад.

1.Li Chunhui. A new method for interval Q -factor inversion from seismic reflection data/ Chuanhui Li, Xuewei Li// *GEOPHYSICS*, Vol. 80, No. 6 (november-december 2015); P. R361-R373.
2.Батраков Д.О. Алгоритм определения задержки импульсных сигналов, основанный на преобразовании Гильберта/ Д.О. Батраков, Д.В. Головин, С.В. Греков, А.Г Батракова// *Вісник Харківського нац. університету*. №853. Вип 14. –2009. С. 71-76
3.Novak A. Nonlinear System Identification Using Exponential Swept-Sine Signal/

IEEE Transactions on instrumentation and measurement Vol. 59, Iss. 8. Aug. –2010. P. 2220 – 2229. DOI: 10.1109/TIM.2009.2031836
4.Farina A. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique/ Presented at the 108th Convention 2000 February 19-22 Paris, France
5.Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высш. шк. –1978. –448с.
6.Яблонский А.А. Курс теории колебаний / А.А. Яблонский, С.С. Нореико// М.: Высш. шк. –1971. 207с.
7.Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк. –2000. –462с.
8.Understanding FFTs and Windowing // [Електронний ресурс] http://download.ni.com/evaluation/pxi/Understanding_FFTs_and_Windowing.pdf
9.Mridula Malhotra. The Performance Evaluation of Window Functions and Application to FIR Filter Design// *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Vol.2, Issue 12, December. –2011. –P. 1-7.
10.Стрілецький Ю.Й. Цифрова обробка сигналів при дослідженні ізоляційного покриття підземних нафтогазопроводів/ Ю.Й. Стрілецький, В.А. Ровінський, О.В. Євчук // *Методи та прилади контролю якості*, №30. – 2013р. –С. 33-38.

Поступила в редакцію 25.09.2017 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Середюк О. Є., докт. техн. наук, проф. Олійник А. П.