МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 519.632+519.688

ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ І ПРИСКОРЕНІ АЛГОРИТМИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ПРИ НЕРУЙНІВНОМУ КОНТРОЛІ ФІЗИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

В. В. Сеничак

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380(342)72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

В роботі описана комп'ютерна реалізація способу переміщення симплексу (СПС) на прикладі стаціонарної температурної залежності (задача Діріхле для рівняння Лапласа) та задачі кручення пружних стержнів (задача Діріхле для рівняння Пуассона).
Ключові слова: задача Діріхле для еліптичних рівнянь, метод скінченних елементів (МСЕ), спосіб переміщення симплексу (СПС).

В работе описана компьютерная реализация способа перемещения симплекса (СПС)на примере стационарной температурной зависимости (задача Дирихле для уравнения Лапласа) и задачи кручения упругих стержней (задача Дирихле для уравнения Пуассона).
Ключові слова: задача Дирихле для эллиптических уравнений, метод конечных элементов (МКЭ), способа перемещения симплекса (СПС).

The symplex movement method computer realization has been described in the article for example of the stationary temperature dependence on (Dirichle problem for Laplace equation) and the torsion of elastic rods problem (Dirichle problem for Poisson equaton)
Key words: Dirichle problem for elliptic equation, finite element method, simplex movement method.

ВСТУП

Застосування в інженерній практиці чисельних методів зводиться до заміни рівнянь математичної фізики для функції неперервного аргументу алгебраїчними рівняннями для сіточних функцій, що задається на дискретній множині точок (сітці). Інакше кажучи, замість неперервної моделі середовища вводиться її дискретний аналог, що дає змогу замінити складний, трудомісткий і дорогий фізичний експеримент економічнішим математичним (чисельним) експериментом. В умовах загальної комп'ютеризації наукових досліджень головним об'єктом при розв'язванні задач математичної фізики стає не класичне диференціальне рівняння з частинними похідними, а його дискретний аналог.

В даній роботі для розв'язування крайових задач еліптичного типу пропонується спрощений варіант методу скінченних елементів – спосіб переміщення симплексу (СПС). Суттєвою перевагою запропонованого методу є надзвичайно простий алгоритм обчислювальних процедур, що використовує тільки один симплекс-елемент лінійного типу у формі трикутника, базисні функції якого визначаються як відношення відповідних площ трикутників, на які поділено елемент, до площі усього трикутника [1].

Ефективний підхід використовує новий варіант методу Монте-Карло, в якому апостеріорні перехідні ймовірності у схемі випадкових блукань вперше замінені апріорними. Це призводить до суттєвого прискорення обчислень, що досягається застосуванням спеціального обчислювального шаблону у формі симплекс-елемента. Вдале поєднання ймовірнісних ідей методу Монте-Карло і барицентричних координат симплексу звільняє від необхідності складати і розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Традиційне нанесення сітки скінченних елементів на досліджувану область також стає не потрібним, досить передбачити обертання симплекса, який транслює граничну інформацію у досліджувану точку. Розроблені математичні моделі і написані ефективні та зручні у користуванні комп'ютерні програми, що реалізують алгоритми способу переміщення симплексу (СПС). Розроблена і описана технологія комп'ютерної реалізації СПС на прикладах стаціонарної температурної задачі та задачах кручення пружних стержнів складного перерізу.

1. Чисельне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Задача Діріхле для рівняння Лапласа є однією із найважливіших задач математичної фізики, що широко використовується в інженерних розрахунках. Ця типова задача поновлення функції є дуже важливою в фізичних і технічних застосуваннях. Її можна інтерпретувати як задачу знаходження електростатичного потенціалу всередині області по відповідному розподілу потенціалу на границі. Інша інтерпретація – модель мильної плівки. До розв'язування задачі Діріхле зводиться актуальна проблема визначення продуктивності нафтового родовища. Аналогічні проблеми виникають в метеорології, топографії, при інтерпретації різноманітних геофізичних експериментальних даних і т.п. Отже, задача Діріхле – модельна задача для розробки нових методів, перевірки нових ідей, які потім можна розповсюджувати на загальну теорію рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо задачу дослідження стаціонарного температурного поля з дискретними крайовими умовами типу Діріхле [2]. Ця задача з геометричною простою областю приваблива тим, що на ній можна зіставити різні обчислювальні методи і прослідкувати за перевагами і недоліками кожного з них.

Нехай потрібно знайти стаціонарний розподіл температури в квадратній пластині, на сторонах якої $X = 0$ і $X = 1$ підтримуються температури 0 і 100 °C відповідно, на стороні $Y = 0$ температура зростає лінійно, а на $Y = 1$ – по закону квадратичної параболи. Задача Діріхле для рівняння Лапласа розв'язана в [2] методом сіток з 25 вузлами, з яких 9 внутрішні (рис. 1). Отриману розв'язувальну систему рівнянь розв'язували як прямим, так і ітераційними методами.

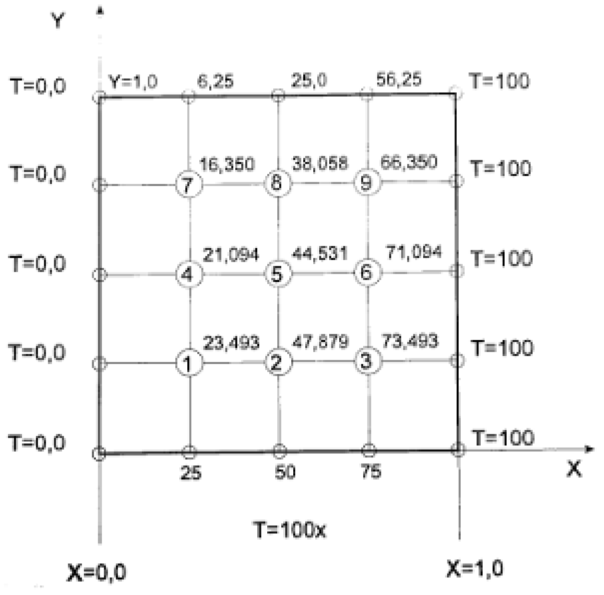

Рисунок 1 - Розрахункові точки досліджуваної області в температурній задачі

За допомогою правила Крамера розв'язувалась система з 9-ти рівнянь з 9-ма невідомими. Отриманий розв'язок прийняли за точний. Зазначимо, що в даному випадку число вузлів невелике, тому вдалось знайти точний розв'язок. Стосовно ітераційних методів можна відзначити їх повільну збіжність. Наприклад, для отримання такого ж результату необхідно було здійснити 30 ітерацій методу одночасних зміщень або 16 ітерацій методу послідовних зміщень, або 9 ітерацій методу послідовної верхньої релаксації, при цьому всі вони виконувались на ЕОМ.

Практично таку ж точність дає запропонований спосіб переміщення симплексу (СПС). При цьому не потрібно складати і розв'язувати системи рівнянь. Для визначення температур в точках A_m послідовно переміщується симплекс-елемент у формі трикутника з вершинами на межі досліджуваної області. Для кожного певного розміщення трикутника з вершинами у точках $B_i, \mathrm{B}_j, \mathrm{B}_k$ значення $T(A_m)$ визначається за формулою

$$T_n(A_m) = \mathrm{T}_i \cdot \xi_i + \mathrm{T}_j \cdot \xi_j + \mathrm{T}_k \cdot \xi_k, \quad (1)$$

де $T_i, \mathrm{T}_j, \mathrm{T}_k$ – відомі значення температур в граничних точках $B_i, \mathrm{B}_j, \mathrm{B}_k$ відповідно, а ξ_i, ξ_j, ξ_k – барицентричні координати (або геометричні ймовірності), що визначаються як відношення відповідних площ, наприклад

$$\xi_i = \frac{\text{mes}\,\Omega_i}{\text{mes}\,\Omega} \qquad (2)$$

Остаточно розв'язок в точці A_m визначається як середнє арифметичне усіх значень $T_n(A_m)$:

$$T(A_m) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T_n(A_m), \qquad (3)$$

де N – число задіяних трикутників в обчислювальний процес. Для уникнення повторення простих обчислювальних процедур зручно користуватись компактною програмою, що реалізує швидкий алгоритм СПС. Вхідними даними є координати (X_A, Y_A) досліджувальних точок $A(M)$, координати (X_B, Y_B) граничних точок $B(N)$ досліджуваної області та значення температур $T(N)$ в вузлових граничних точках $B(N)$. Вихідними даними є середнє арифметичне значення $T(A)$ температури в досліджуваній точці A.

Серія обчислювальних експериментів, проведених за допомогою комп'ютерної програми, написаної мовою програмування С, показала, що найвідповідальнішим етапом в СПС є вибір граничних вузлів (їх кількість і розміщення) та форма симплексу, що суттєво впливає на точність результату. На рис. 2 зображено один із можливих варіантів вибору граничних вузлових точок та три форми обчислювальних шаблонів (форм трикутників).

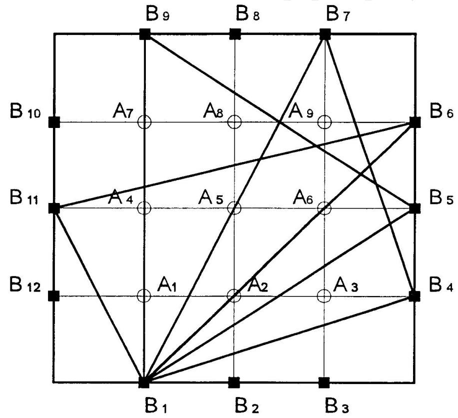

Рисунок 2 – Розрахункові точки на пластині і обчислювальні шаблони $(B_1, B_4, B_7), (B_1, B_5, B_9), (B_1, B_6, B_{11})$

Результати обчислень за трьома обчислювальними шаблонами (шаблон 1 (B_1, B_4, B_7), шаблон 2 (B_1, B_5, B_9), шаблон 3 (B_1, B_6, B_{11})) та їх середнє арифметичне подані у порівняльній таблиці 1.

Таблиця 1. Результати комп'ютерного аналізу стаціонарного температурного поля

Розрахун-кові точки	Точний розв'язок	СПС шаблон 1	СПС шаблон 2	СПС шаблон 3	СПС (середнє арифметич-не)	Відносна похибка δ (%)
A_1	23,493	24,375	22,656	23,958	23,663	0,6
A_2	47,879	47,143	49,143	47,591	47,984	0,2
A_3	73,493	74,375	72,656	73,958	73,663	0,2
A_4	21,094	21,964	19,792	23,177	21,644	2,5
A_5	44,531	44,792	44,792	44,705	44,763	0,5
A_6	71,094	71,964	69,792	73,177	71,644	0,7
A_7	16,350	15,208	17,969	15,625	16,267	0,5
A_8	38,058	37,500	40,365	35,482	37,782	0,7
A_9	66,350	65,208	67,969	65,625	66,267	0,1

Відносна похибка $\delta\,(\%)$ результатів обчислень по окремих точках досліджуваної області знаходиться в таких межах: $0{,}1 \le \delta \le 2{,}5$.

Підсумовуючи викладене можна впевнено стверджувати, що СПС є простим, надійним і ефективним методом розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Безперечно, найкращі результати при цьому отримані в центрі ваги досліджуваної області (в даній задачі це точка A_5).

2. Чисельне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Покажемо, як можна застосувати СПС до розв'язування задачі, пов'язаної із дослідженням температурного поля при наявності джерела (стоку), що ставиться так: розв'язати рівняння Пуассона

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{g} \tag{4}$$

з однорідними граничними умовами

$$U_{|\Gamma} = 0, \tag{5}$$

де U – шукана функція, Γ – границя досліджуваної області, g – функція, що залежить від просторових змінних (може бути і константою).

Для цього зведемо задачу (4), (5) до задачі Діріхле для рівняння Лапласа з неоднорідними граничними умовами (6), (7)

$$\Delta \mathrm{V} = 0 \tag{6}$$

$$V_{\Gamma} = \frac{1}{4} g\left(x^2 + \mathrm{y}^2\right) \tag{7}$$

за допомогою функції

$$\mathrm{V} = \mathrm{U} - \frac{1}{4} g\left(x^2 + \mathrm{y}^2\right). \tag{8}$$

Така заміна дає змогу неоднорідність з рівняння перенести в граничні умови. Тепер для розв'язання поставленої задачі можна застосувати СПС. Зауважимо, що такий підхід є корисним в задачах кручення призматичних стержнів, а також в задачах згину пластини довільного профілю з шарнірним спиранням по контуру та згину нерівномірно нагрітих пластин.

Задача кручення пружних стержнів зводиться до відшукання функції напружень Прандтля $U(\mathrm{x},\mathrm{y})$ з рівняння Пуассона

$$\Delta \mathrm{U} = -2 \tag{9}$$

при нульових значеннях функції напружень на контурі

$$U_{|\Gamma} = 0 \tag{10}$$

Знаючи функцію Прандтля, можна визначити дотичні напруження τ_{yz} і τ_{xz} в поперечному перетині стержня (Ω):

$$\tau_{\mathrm{yz}} = -G \cdot \Theta \cdot \frac{\partial U}{\partial x}, a \tau_{xz} = \mathrm{G} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{11}$$

де G – модуль зсуву, Θ – інтенсивність кута закручування (крутка) в поперечному перетині Ω, а також крутний момент

$$M_{\text{крут.}} = 2G \cdot \Theta \iint_{\Omega} U(\mathrm{x},\mathrm{y})\, d\Omega. \tag{12}$$

Геометрична жорсткість визначається за формулою

$$J_T = 2\iint_{\Omega} U(\mathrm{x},\mathrm{y})\, d\Omega. \tag{13}$$

Отже, з визначенням функції напружень Прандтля задача кручення призматичного стержня буде розв'язана повністю. Однак, визначення напружень в стержні з некруглим поперечним перетином є досить складною задачею. Незважаючи на загальність побудови формул для визначення напружень і кутових переміщень, задача кручення стержня, що має іншу форму перетину, становить собою самостійну проблему, розв'язання якої вимагає, з одного боку, високої кваліфікації, а з іншого – великої затрати праці. Для багатьох призматичних стержнів зі складними профілями, що застосовуються в техніці, одержання точного розв'язку пов'язано із значними математичними труднощами. На практиці для розв'язання цієї задачі здебільшого використовують або варіаційні методи теорії пружності, або методи чисельного інтегрування рівнянь, або експериментальні методи аналогій.

Розглянемо задачу кручення пружних стержнів в термінах функції напружень Прандтля, що ставиться так: визначити значення крутного моменту $M_{\text{крут}}$ і максимального дотичного напруження $\tau_{\max}$ при загальному значенні $\mathrm{G\Theta}$ для прямокутної області (S): $a\mathrm{S} = \{(x) \le 3; (y) \le 2\}$. Така задача розв'язувалась в [3] при $\mathrm{G\Theta} = 1$. Автори О. Зенкевич і К. Морган використовували метод скінчених різниць (МСР) з поділом області на 24 частини (рис. 2).

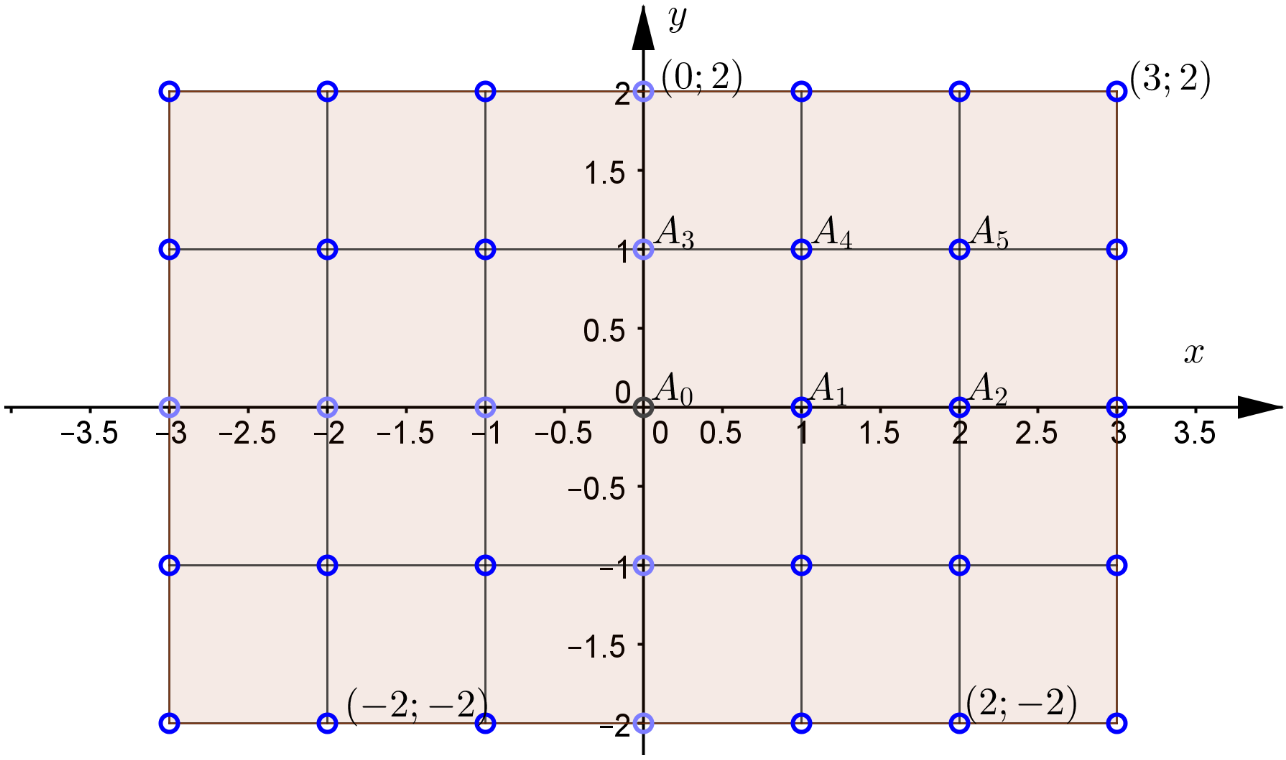

Рисунок 2 – Прямокутна область з нанесенням скінченно-різницевої сітки

В силу симетрії області значення функції напружень обчислювались у внутрішніх вузлових точках лише для правої верхньої чверті профілю у точках $A_0(0;0), A_1(1;0), A_2(2;0), A_3(0;1), A_4(1;1), A_5(2;1)$. Відповідна система лінійних аглебраїчних рівнянь (СЛАР) містила шість невідомих, розв'язавши яку отримали:
$U(A_0)=3{,}1370$; а $U(A_1)=2{,}8866$; а $U(A_2)=1{,}9971$;
$U(A_3)=2{,}3873$; а $U(A_4)=2{,}20062$; а $U(A_5)=1{,}5508$.
За допомогою отриманих значень були обчислені $M_{\text{крут}}=65.41$; а $\tau_{max}=2{,}3873$. При цьому розбіжність між точним розв'язком $\left(M_{\text{крут}}=76.4,\ \tau_{\max}=2.96\right)$ і отриманими значеннями складають 14.38% і 19.35%, відповідно. З метою уточнення отриманих результатів авторами були використані методи Гальоркіна-Бубнова та Канторовича, що у підсумку дало можливість зменшити відносні похибки по $M_{\text{крут}}$ і $\tau_{\max}$ до 3% і 2%, відповідно.

Покажемо, що для розв'язання такої задачі за допомогою СПС достатньо визначити значення функції Прандтля тільки в одній точці – центрі ваги перетину (т. A_0). Згідно мембранної аналогії Прандтля поверхня напружень з великими аплікатами становить собою звиклий параболоїд обертання, лише поблизу границі під впливом форми контура будуть спостерігатись спотворення. Просторовий графік, отриманий відкладанням на перпендикулярах до площини поперечного перетину значень функції напружень для відповідних точок перетину, отримав назву „горба напружень” або поверхні Прандтля [4]. Цей графік характерний тим, що його горизонталі є траєкторіями дотичних напружень, а нахил поверхні „горба напружень” пропорційний величині дотичних напружень. При цьому аналогом напруження є кут, який складає дотична до поверхні, а аналогом крутного моменту – об'єм, що знаходиться між площиною контура і поверхнею напружень.

Враховуючи те, що поверхня напружень Прандтля є параболічною і, використовуючи геометричний зміст похідної, задача кручення зводиться до суто геометричної [5]. Так, щоб визначити максимальні дотичні напруження розітнемо поверхню Прандтля площиною, що проходить через найвищу аплікату $U_{\max}$ і точку контура, найближчу до центра кручення. В перерізі поверхні напружень отримуємо параболу, аналітичне рівняння якої легко знайти. Знаючи аналітичне рівняння параболи, за відомими формулами (11) визначаємо τ_{max}. Геометричну жорсткість J_T можна визначити за формулою (14), яка не містить операцій інтегрування:

(14)

де $S_{\text{пер}}$ – площа поперечного перетину стержня.

Для отримання наближених оцінок розв'язків простота обчислювального процесу СПС дає змогу обмежитись ресурсами звичайних мікрокалькуляторів. Задіявши в обчислення тільки один симплекс-елемент з вершинами у точках $(-2;-2),(2;-2),(0;2)$ отримали значення:
$U_{\max} = \mathrm{U}(A_0) = 3.0, a M_{крут} = 72.0, a \tau_{max} = 3.0$.

Відносні похибки для $M_{\text{крут}}$ і $\tau_{\max}$ у порівнянні із точними значеннями становлять 5.76% і 1.95%, відповідно (нагадаємо, що використання МСР дало відносні похибки 14.38% і 19.35%, відповідно).

Слід також зазначити, що геометричний підхід до задачі кручення, при отриманому за допомогою МСР максимальному значенні $U_{\max} = \mathrm{U}(A_0) = 3.137$, дає цілком прийнятний результат: $M_{\text{крут}} = 75.288$ (відносна похибка 1.46%), $\tau_{\max} = 3.137$ (відносна похибка 1.78%).

ВИСНОВКИ

1. Обчислювальні процедури СПС не вимагають нанесення традиційної сітки на досліджувану область та розв'язувати СЛАР. Значення шуканої функції можна обчислювати для будь-якої кількості точок, зокрема для однієї.

2. Обчислювальні експерименти з використанням СПС переконливо демонструють позитивні сторони і переваги запропонованого підходу для ефективного розв'язування крайових задач математичної фізики.

3. Для розв'язання задачі кручення пружних стержнів довільного поперечного перетину застосовується геометричний підхід, при цьому значення функції Прандтля достатньо визначити тільки в одній точці – центрі кручення.

4. Запропонований СПС можна поширити на широкий клас задач-аналогів, при чому для тривимірних задач в якості симплекс-елемента пропонується використати тетраедр.

1. В. М. Сеничак, В.В. Сеничак. Побудова базисних функцій тривимірного симплекс-елемента // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2017. – №1(37). – с. 91-97. 2. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. – М.: Мир, 1982. – 238 с. 3. Зенкевич О.К., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с. 4. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматиз, 1963. – 68с. 5. Сеничак В.М, Ріпецький Р.Й., Ріпецький Є.Й. Геометричний підхід до задач кручення пружних стержнів // Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції „Прикладні задачі математики”. – Івано-Франківськ, 2016. – с. 87-89.

Поступила в редакцію *27.09.2017* р.
Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Олыйник А. П., докт. техн. наук, проф. Горбійчук М. І.