

УДК 62-97

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМАЦІЇ ОБЕРТОВИХ ОБ'ЄКТІВ СКЛАДНОЇ ПРОСТОРОВОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Г. В. Григорчук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, e-mail: grygorchukl@gmail.com

Пропонується математична модель процесу деформування та напруженого стану протяглих обертових об'єктів складної геометричної конфігурації. Обрано клас моделі як некоректної задачі рівнянь математичної фізики. Запропоновано модель процесу деформування прямолінійної тороподібної та конічної ділянок. Запропоновано модель напруженого стану об'єктів, виявлено напрями подальших досліджень.

Ключові слова: обертові об'єкти, некоректна задача, типи моделей, деформація, напруження.

Предлагается математическая модель процесса деформирования и напряженного состояния протянутых вращающихся объектов сложной геометрической конфигурации. Избран класс модели как некорректной задачи уравнений математической физики. Предложена модель процесса деформирования прямолинейной торообразной и конической участков. Предложена модель напряженного состояния объектов, выявлены направления дальнейших исследований. Ключевые слова: вращающиеся объекты, некорректная задача, типы моделей, деформация, напряжение.

Abstract: The mathematical model of the process of deformation and the stressed state of draft rotating objects of complex geometric configuration is suggested. The class of the model has been selected as an incorrect task of the mathematical physics equations. The model of the process of deformation of rectilinear void and conical sections has been proposed. The model of the stressed state of objects has been suggest, directions of further researches have been defined.

Key words: rotating objects, incorrect task, types of models, deformation, stress.

При аналізі технічного стану обертових об'єктів складної геометричної конфігурації, крім експериментальних методів [1,2] оцінки основних характеристик, широко використовуються методи математичного моделювання [3-5], реалізація яких для діючих об'єктів ускладнюється природою явищ та процесів, що моделюється. Згідно з підходом, запропонованим в [6], будь яка задача управління діючими об'єктами, або оцінки його технічного стану може мати три основних підходи до її розв'язання.

Нехай для об'єкта, що моделюється, відомими є початкові характеристики  $\bar{X}$ , до яких входять всі проектні параметри та очікувані умови експлуатації. В такому випадку значення параметрів  $\bar{Y}$ , в які переходять в процесі експлуатації характеристики  $\bar{X}$ , можуть бути одержані шляхом розв'язання деякого функціонального рівняння виду:

$$\bar{Y} = A(V_1, V_2, \dots, V_n) \cdot \bar{X} \quad (1)$$

де  $A(V_1, V_2, \dots, V_n)$  - деякий оператор, який формалізує всі впливи  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , що діють на об'єкт в процесі експлуатації; його структура є відомою. Фактично (1) - це рівняння, або система рівнянь математичної фізики з коректно поставленими грактичними та початковими умовами, для яких розв'язок (точний або наближений) існує і визначається однозначно, що доводиться відповідними математичними викладками та результатами [7]. Задача (1) як правило розв'язується на етапі проектування. При цьому характеристики  $V_1, V_2, \dots, V_n$  чітко формалізуються. З точки зору практичного використання, задача (1), для оцінки технічного стану, або управління об'єктом, може бути використана лише для одержання попередніх результатів про проектний стан об'єкта в процесі експлуатації для деяких модельних, найбільш стандартних, значеннях параметрів  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , які чисто суттєво відрізняються від реальних умов експлуатації  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)$ , які є

функціями від часу. Часто вони враховують реальні умови експлуатації, проте в переважній кількості випадків структура та кількісні характеристики цих функцій є невідомими.

2. Якщо для об'єктів відомими є характеристики  $\bar{x}$ , а також функції  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_m(t)$  задають дію найбільш загальних силових, фізичних, кліматичних та інших факторів – наприклад, робочий тиск в системі, режим обертання, теплові характеристики, тощо. Особливістю такого підходу є те що  $V_1(t), V_2(t), \dots, V_m(t), m < n$  є відомими функціями. В такому випадку задача записується у вигляді

$$\bar{y} = A_t(V_1(t), \dots, V_m(t)) \cdot \bar{x} \quad (2)$$

де  $A_t$  відрізняється від  $A$ , наведеного в (1), більш простою структурою. При цьому для системи або рівняння (2) також встановлюється відповідності, проте більш прості, ніж в (1), граничні та початкові умови. В окремих випадках в задачі (2) враховуються зміни просторової конфігурації досліджуваного об'єкта.

3. Найбільш загальним та природнім випадком, що виникає при розв'язанні задач управління, або аспекти технічного стану досліджуваними об'єктами є наступний: в початковий момент часу (наприклад, на початку експлуатації) відомими є характеристики  $\bar{x}$  об'єкта, а за результатами технічного обстеження визначаються характеристики  $\bar{y}$  об'єкта, що є фактично зміненими в процесі експлуатації характеристиками  $\bar{x}$ . В реальних випадках  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  визначаються не на всій поверхні досліджуваного тіла (часто це є практично неможливим), а лише на деякій частині (підмножини) цього об'єкта. В такому випадку задача управління або технічного стану об'єкта формалізується наступним чином: необхідно розв'язати задачу:

$$\begin{cases} \bar{y} = A \cdot \bar{x} \\ \bar{x}(\Omega) = \bar{x}_B \\ \bar{y}(\Omega) = \bar{y}_B \end{cases} \quad (3)$$

де  $\Omega$  – частина області, на якій задаються  $\bar{x}_B$  та  $\bar{y}_B$ ,  $A$  – оператор з невідомою структурою,  $\bar{x}_B$  та  $\bar{y}_B$  значення параметрів стану об'єкта на всій області простору, який він займає. Очевидно, задача (3) є некоректно поставленою, для її розв'язання необхідно запропонувати певні умови регуляризації [8]. В

такому випадку задача (3) розкладається на такі під задачі:

а) визначення  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  на всій області, яку займає досліджуваний об'єкт за відомими значеннями  $\bar{x}_B$  та  $\bar{y}_B$ ;

б) встановлення структури оператора  $A$  для визначення природи сил та навантажень, що діють на досліджуваний об'єкт та їх кількісних характеристик.

Розв'язання задачі:

а) розв'язання з вибором апарату інтерполяції або апроксимації даних, який дозволяє відтворити  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  за відомими  $\bar{x}_B$  та  $\bar{y}_B$ . При цьому застосовується апарат інтерполяційних кубічних сплайнів або цих же сплайнів із згладжуванням, а також апарату апроксимації в залежності від інформації про точність вимірювання  $\bar{x}_B$  та  $\bar{y}_B$  або про природній характер зміни величини  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  в процесі експлуатації (лінійність залежностей, виділення найбільш характерних сил та навантажень, температурні режими, тощо).

На етапі б) за визначеними  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  відновлюється структура оператора  $A$ . Наприклад, вибирається модель процесу деформації та напруженого стану, наслідок чого розв'язується задача типу (2) за відомим  $\bar{x}$  визначаються

$$\bar{y}_t = A_t^*(V_1(t), \dots, V_m(t)) \cdot \bar{x} \quad (4)$$

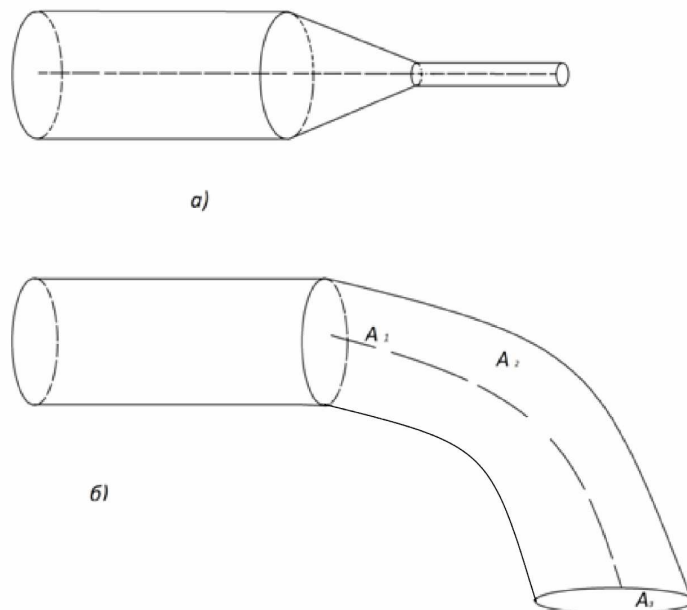
Вибір оператора  $A_t$  вважається завершеним, якщо значення  $\bar{y}_t$  мало відрізняється від  $\bar{y}$ . За знайденим оператором

$$A_t = \lim_{T \rightarrow N} A_t^*$$

Який є результатом підбору  $A_t^*$  протягом  $N$ -разового розв'язання задачі (4) визначають не тільки значення  $\bar{y}$ , але і прогнозовані значення  $\bar{y}_B$ , які дозволяють робити прогнози стосовно оцінки залишкового ресурсу об'єкта.

Запропоновані підходи можуть бути проілюстровані на наступному прикладі. При вивченні геометричної конфігурації обертових печей на підприємствах з виробництва цементу, сушильного обладнання в цукровій промисловості, тощо, спрощена схема сказаних конструкцій може бути подана як комбінація спряжених прямолінійних кінцевих та тороподібних ділянок

:



а) прямолінійно-конічне спряження;  
б) прямолінійно-тороподібне спряження.

Рисунок 1 – Схеми спряження елементів конструкції обертових об'єктів

Нехай в контрольний та початковий моменти часу задаються координати деякої множини точок на поверхні досліджуваних об'єктів. Використовуючи інтерполяційні процедури та методи диференціальної геометрії можна одержати подання для трьох сказаних типів елементів конструкції досліджуваних тіл: для прямолінійної ділянки в початковий момент часу радіус-вектор будь якої точки в початковий момент часу записується у вигляді:

$$\vec{V}_0 = \begin{cases} x = s \\ y = v \cos \varphi \\ z = v \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

$S$ -повздожня координата,  $S \in [S_0, S_n]$ , де  $S_0$  - початкова,  $S_n$  - кінцева точка осі прямолінійної ділянки,  $\varphi \in [0; 2\pi]$  - полярний кут;  $v \in [R_1, R_2]$ ,  $R_1$  - внутрішній,  $R_2$  - зовнішній радіуси для контрольного моменту часу подання (5) трансформується в наступне подання:

$$\vec{r}_k = \begin{cases} x = S + (\alpha_n(S) \cdot \sin \varphi + \alpha_b(S) \cos \varphi) \rho(s, r, \varphi) \\ y = y(s) + (\beta_n(s) \sin \varphi + \beta_b(s) \cos \varphi) \rho(s, r, \varphi) \\ z = z(s) + (r_n(s) \sin \varphi + r_b(s) \cos \varphi) \rho(s, r, \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

де  $\rho(s, r, \varphi)$  - функція, що задає закон зміни радіуса ділянки  $\{s, y(s), z(s)\}$  - координати деформованої осі ділянки; функції  $y(s)$  та  $z(s)$  - результати реалізації інтерполяційних процедур  $[\alpha_n(S), \beta_n(s), r_n(s)]$  та  $[\alpha_b(S), \beta_b(s), r_b(s)]$  - координатами одиничних векторів нормалі та бінормалі до осі

трубопроводу, що визначаються за відомими формулами з курсу диференціальної геометрії [9], для конічної ділянки подання для радіус-вектора в початковий момент часу записується у вигляді

$$\vec{V}_o = \begin{cases} x = s \\ y = \rho(v, s) \cos \varphi \\ z = \rho(v, s) \sin \varphi \end{cases} \quad (7)$$

де:  $\rho(v, s) = \frac{R_0 - R_1}{s_0 - s_1} s + \frac{R_1 s_0 - R_0 s_1}{s_0 - s_1} + v$

$R_0$  та  $R_1$  відповідно найбільший та найменший радіуси конічної ділянки;

$$\vec{V}_k = \begin{cases} x = s + (\alpha_n(s) \cdot \sin \varphi + \alpha_b(s) \cos \varphi) \rho(s, r) \\ y = y(s) + (\beta_n(s) \sin \varphi + \beta_b(s) \cos \varphi) \rho(s, r) \\ z = z(s) + (r_n(s) \sin \varphi + r_b(s) \cos \varphi) \rho(s, r) \end{cases} \quad (8)$$

де:  $\{s; y(s); z(s)\}; \{\alpha_n(s); \beta_n(s); r_n(s)\}$   
 $\{\alpha_b(s); \beta_b(s); r_b(s)\}$  - компоненти точок  
 Осі деформованої конічної ділянки, нормалі та  
 бінормалі до неї відповідно,  $\rho(s, r)$  -  
 визначається аналогічно з (7). Якщо радіуси  $R_0$ ,  
 $R_1$  та координати  $s_0, s_1$  змінюються в процесі  
 деформації, ці значення підставляються у вираз  
 (7) для  $\rho(s, r)$ . Для визначення координат  
 $\{s, y(s), z(s)\}$  в поданні (8) доцільно

$$H(s) = \varepsilon_1 \left[ (s - s_1)^2 \left( \frac{2s}{(s_0 - s_1)^2} + \frac{-s_1 + 3s_0}{(s_0 - s_1)^3} \right) + \varepsilon_2 \left[ \frac{(s - s_0)(s - s_1)^2}{(s_0 - s_1)^2} \right] + \varepsilon_3 \left[ (s - s_0)^2 \left( \frac{-2s}{(s_1 - s_0)^3} + \frac{3s_1 - s_0}{(s_1 - s_0)^2} \right) + \varepsilon_4 \left[ \frac{(s - s_0)^2 (s - s_1)}{(s_1 - s_0)^2} \right] \right]; \quad (11)$$

-для тороподібної ділянки в початковий момент часу:

$$\vec{V}_0 = \begin{cases} x = (R_0 + v \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R_0 + v \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0; 2\pi]; \end{cases} \quad (12)$$

г  $\in [R_1; R_2]$  і  $\theta \in [\varphi_1; \varphi_2]$  де  $R_1$  і  $R_2$   
 відповідно внутрішній і зовнішній радіуси  
 тороподібної ділянки;  $R_0$  - її радіус кривини;  $\varphi_1$   
 та  $\varphi_2$  - кути розкриття тороподібної ділянки  
 $(\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \frac{\pi}{2})$ . Всі ці параметри є відомими з  
 проектної документації; в контрольний момент  
 часу подання (12) набуває виду

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) - це параметричне рівняння  
 прямої, яке може бути після перетворень  
 записане у виді:

$S_0$  та  $S_1$  - початкова та кінцева повздовжні  
 координати конічної ділянки;

г  $\in [0; \delta]$ ;  $\delta$  - товщина стінки. В контрольний  
 момент часу залежність (7) набуває виду

використовувати техніку многочленів Ерміта з  
 умовами:

$$H(S_0) = \varepsilon_0, \quad H(S_1) = \varepsilon_2, \quad H'(S_0) = \varepsilon_1 \\ H'(S_1) = \varepsilon_3, \quad (9)$$

експериментально визначені значення  $\varepsilon_0, \varepsilon_1,$   
 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ , як правило задовольняють умові  
 1,  $i = 1, 2, 3, 4$ . (10)

Крім того  $\varepsilon_0$  та  $\varepsilon_1$  мають відповідати умовам  
 спряження прямолінійної та конічної ділянок. За  
 умовами (9) многочлен набуває виду

$$\vec{V}_k = \begin{cases} x = (R_H + v \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R_H + v \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0; 2\pi]; \end{cases} \quad (13)$$

де  $R_H$  - новий радіус кривини тороподібної  
 ділянки. За відомими (рис. 1.) координатами  
 точок

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$   
 знаходиться геометричне місце точок рівно  
 віддалених від  $A_1, A_2$  та  $A_3$  з наступної  
 системи [6].

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha t \\ y = y_1 + \beta t \\ z = z_1 + \gamma t \end{cases} \quad (15)$$

де  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – напрямний вектор прямої, який визначається з (14). Рівняння площини, що проходить через точки  $(A_1, A_2, A_3)$  записується у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Підставляючи в рівнянні (16) залежність (15) з урахуванням (13) знаходимо координати  $(x^*, y^*, z^*)$  точки перетину площини (16) з прямою (15) після чого:

$$R_H^2 = (x^* - x_1)^2 + (y^* - y_1)^2 + (z^* - z_1)^2$$

Подання (5-6),(7-8) та (12-13) повністю описують недеформований та деформований об'єкт дослідження, після чого можна проводити оцінку зміни напружено-деформованого стану об'єкта в рамках теорії пружності за відомою методикою [7]:

1. Знаходяться компоненти векторів локальних базисів для трьох типів ділянок за формулами (5)-(6)- для прямолінійної, (7)-(8)- для конічної та (12)-(13)- для тороподібної ділянок:

$$\bar{\Xi}_i^o = \frac{\partial \bar{v}_o}{\partial x_i}, x_1 = v; x_2 = \varphi; x_3 = s \quad (18)$$

для прямолінійної та конічної

$$\bar{\Xi}_i^o = \frac{\partial \bar{v}_o}{\partial x_i}, x_1 = \gamma; x_2 = \varphi; x_3 = \theta \quad (19)$$

в початковий момент, та

$$\bar{\Xi}_i^k = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \quad (20)$$

в контрольний момент часу.

2. Знаходяться компоненти матричного тензора

$$\begin{aligned} g_{ij}^o &= \bar{\Xi}_i^o \cdot \bar{\Xi}_j^o \\ g_{ij}^k &= \bar{\Xi}_i^k \cdot \bar{\Xi}_j^k \end{aligned} \quad (21)$$

3. Знаходимо компоненти тензора деформації

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (g_{ij}^k - g_{ij}^o) \quad (22)$$

4. Знаходяться компоненти тензора напружень в рамках лінійної теорії пружності:

$$\sigma_{IJ} = \lambda I_r(\epsilon) g_{IJ} + 2\mu \epsilon_{IJ} \quad (23)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  параметри Ламе матеріалу,  $I_r(\epsilon)$  перший інваріант тензору деформації:

$$I_r(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} g^{ij} \quad (24)$$

Де  $g^{ij}$  компоненти матриці оберненої до  $\{g_{ij}\}$ , обчисленої за (21) для початкового моменту часу. Таким чином, початкова модель процесу деформування та напруженого стану

об'єктів складної геометричної форми, які працюють в умовах обертання навколо однієї з осей (як правило-повдовжньої), повністю розроблена.

Напрямки подальших досліджень включають наступне:

- збір даних про геометрію та умови експлуатації об'єктів та її зміну в процесі експлуатації;

- вивчення залежності результатів моделювання від способу апроксимації або інтерполяції даних;

- визначення параметрів Ламе, режимів роботи агрегатів (температура, тиски, вологість, швидкості обертання тощо);

- встановлення необхідності вибору інших моделей напруженого стану;

- оцінка точності визначення координат точок на поверхні обертових об'єктів;

- проведення широкого класу модельних та натурних розрахунків, для чого необхідно розробити відповідне програмне забезпечення.

1. *Неразрушающий контроль и диагностика: Справочное пособие.* – Под редакцией В.В.Клюева. – М.: машиностроение, 2003-654с  
 2. *Вологжанинов Ю.И. Приближенные методы разделения напряженной и экспериментальной механике.* – Ю.И.Вологжанинов. – К.:Наукова думка – 1993 – 157с  
 3. *Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем /Н.А.Алфутов.* – М.: Машиностроение. -1991-336с  
 4. *Федоренко Д.П. Приближенные решения задач оптимального управления.* -/Р.П.Федоренко. – М.:наука 1978-478с  
 5. *Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов.* - / Г.С.Писаренко, А.Л.Яковлев, В.В.Матвеев. – К.: Наукова думка,1975-704с.  
 6. *Олійник А.П. Математичний апарат для контролю НДС трубопроводів при зміні їх просторового положення.* - /А.П.Олійник, Л.М.Заміховський. – Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2008-306с.  
 7. *Седов Л.И. – Механика сплошных сред.* - /Л.И.Седов – М.: Наука 1984-572с  
 8. *Тихонов А.Н. Методи решения некорректных задач.* - /А.Н.Тихонов, В.Я.Аренев. – М.:Наука 1979- 285с  
 9. *Победра Б.Е. Лекции по тензорному анализу* – /Б.Е.Победра. – Издательство МГУ. – 1986-264с

Поступила в редакцію 25.09.2017 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Райтер П. М., докт. техн. наук, проф. Семенцов Г. Н.