

УДК 534.131.1.2:534.138.1

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В РЕЖИМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ЛЭМБА****М. И. Романюк**

НТУУ "Киевский политехнический институт", ул. Политехническая, 16, корпус 12, г.Киев, 03056, тел.: (044)454-90-72, e-mail:romanyuk\_rita@ukr.net, моб. тел.: 066-97-21-841

*Розглянута розрахункова схема перетворювача контактної типу з п'єзоелектричним елементом у формі диску. Перетворювач випромінює пружні хвилі у масивному металевому листі через шар узгоджувачої рідини. Виконано розрахунок коефіцієнта передачі з електричної на механічну сторону п'єзоелектричного диску. Показано, що для ефективної роботи випромінювача в області високих частот, необхідно вибирати диски з мінімально можливим діаметром. Досліджено рух матеріальних часток у шарі узгоджувачої рідини. Показано, що цей шар є своєрідним резонатором, який суттєво змінює спектральний склад імпульсу тиску, що формується перетворювачем на поверхні металевого листа. Вперше зроблено висновок про необхідність урахування як факту існування шару узгоджувачої рідини, так і товщини цього шару. Отримані вирази для розрахунку амплітуд нормальних хвиль Лемба, які збуджуються нормальними напруженнями, діючими на одній боковій поверхні листа. Вперше отримані розрахункові співвідношення, які враховують вплив геометричних та фізико - механічних параметрів всіх елементів ультразвукового перетворювача контактної типу на ефективність збудження нормальних хвиль Лемба в заданому діапазоні частот. Вони можуть бути використані при проектуванні нових пристроїв неруйнівного контролю листового металопрокату.*

*Ключові слова: п'єзоелектричний перетворювач, хвилі Лемба, шар узгоджувачої рідини, режим збудження.*

*Рассмотрена расчетная схема преобразователя контактного типа с пьезоэлектрическим элементом в форме диска. Преобразователь излучает упругие волны в массивном металлическом листе через слой согласующей жидкости. Выполнен расчет коэффициента передачи с электрической на механическую сторону пьезоэлектрического диска. Показано, что для эффективной работы излучателя в области высоких частот, необходимо выбирать диски с минимально возможным диаметром. Исследовано движение материальных частиц в слое согласующей жидкости. Показано, что этот слой является своеобразным резонатором, который существенно изменяет спектральный состав импульса давления, что формируется преобразователем на поверхности металлического листа. Впервые сделан вывод о необходимости учета как факта существования согласующего слоя жидкости, так и его толщины. Получены выражения для расчета амплитуд нормальных волн Лэмба, которые возбуждаются нормальными напряжениями, действующими на одной боковой поверхности листа. Впервые получены расчетные соотношения, которые учитывают влияние геометрических и физико-механических параметров всех элементов ультразвукового преобразователя контактного типа на эффективность возбуждения нормальных волн Лэмба в заданном диапазоне частот. Они могут быть использованы при проектировании новых устройств неразрушающего контроля листового металлопроката.*

*Ключевые слова: пьезоэлектрический преобразователь, волны Лэмба, слой согласующей жидкости, режим возбуждения.*

*The calculation scheme of the transducer of a contact type with a piezoelectric element of a disk-form was considered. The transducer radiates the elastic waves in a massive metal plate through the layer of matching liquid. The coefficient of transmission from the electrical to the mechanical side of the piezoelectric disc was calculated. It was shown that for the effective operation of the radiator at high frequencies, it is necessary to choose the discs with the smallest possible diameter. The motion of material particles in the layer of the matching liquid was researched. It was shown that this layer is a peculiar resonator, which significantly modifies the spectral structure of the pulse pressure, which is formed on the*

metal plate surface. The conclusion was made about the need to consider the existence of the matching liquid layer as well as the thickness of this layer. The expressions for calculating the amplitudes of normal Lamb waves, which are excited by the normal stresses acting on one side of the sheet were obtained. For the first time there were obtained the calculated relations that take into account the effect of geometrical, physical and mechanical properties of all the elements of the ultrasonic transducer of a contact type on the efficiency of excitation of normal Lamb waves in a given frequency range. This relations can be used in the design of new devices for nondestructive testing of metalrolling.

Key words: piezoelectric transducer, Lamb waves, layer of the matching liquid, excitation mode.

Листовой прокат является основным конструкционным материалом для изготовления труб большого диаметра, которые используются в магистральных нефте- и газопроводах. Повышение достоверности результатов дефектологических исследований листового металлопроката является весьма актуальной для многих сфер промышленности.

Расчету характеристик пьезоэлектрического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн в пластинах посвящено множество статей в различных журналах акустического направления [1, 2]. Успешное решение этой задачи предполагает глубокое понимание закономерностей процессов возбуждения, распространения, отражения от неоднородностей и регистрации ультразвуковых волн. Изучению этих закономерностей посвящены сотни работ как теоретического, так и экспериментального плана. Так, расчету характеристик пьезоэлектрического преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых волн в пластинах посвящен цикл работ Данилова В. Н., которые регулярно публикуются в журнале «Дефектоскопия» (см. библиографию в [1]). Вместе с тем и по сей день остаются открытыми многие практически важные вопросы. Это, прежде всего, вопрос о влиянии толщины слоя согласующей жидкости и размеров площадки механического контакта на эффективность возбуждения ультразвуковых волн в пластине в заданном диапазоне частот.

Целью настоящей работы является построение расчетных соотношений, в которых содержатся ответы на перечисленные выше вопросы.

Пьезоэлектрические преобразователи являются преобразователями контактного типа и их практическое использование возможно лишь при наличии механического контакта с объектом, в котором возбуждаются упругие волны. Излучающий пьезоэлектрический преобразователь создает на поверхности металлической пластины механические напряжения (нагрузки).

На рис.1 показана расчетная схема типового пьезоэлектрического преобразователя, механический контакт которого с металлическим листом (поз.4 на рис.1) обеспечивается слоем жидкости (поз.3). Упругие колебания формируются

пьезокерамическим диском (поз.2), на металлизированные поверхности  $z = 0$  и  $z = \alpha$  которого подается разность потенциалов  $U_{\Gamma} e^{i\omega t}$  ( $U_{\Gamma}$  - амплитуда;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  - круговая частота;  $t$  - время) от генератора с внутренним сопротивлением  $R_{\Gamma}$ . Пьезокерамический диск соединен с тыловой акустической нагрузкой (поз. 1), конструкция которой такова, что в ней реализуется режим бегущих волн.

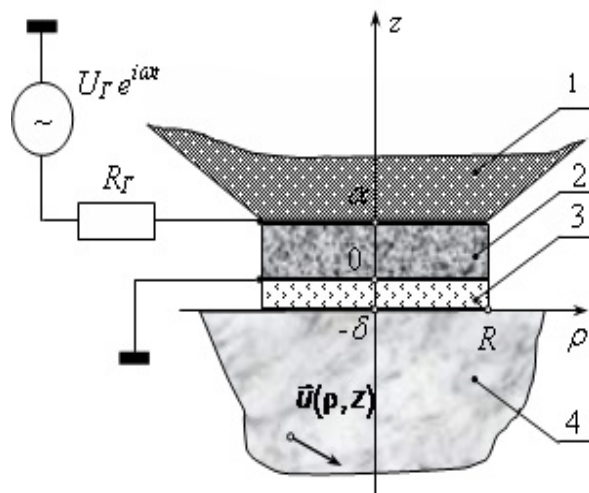


Рисунок 1 – Расчетная схема типового преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых волн в листовом металлопрокате

Конечной целью расчета является определение амплитудных значений компонентов вектора смещения  $\mathbf{u}(\rho, z)$  ( $\rho, z$  - текущие координаты цилиндрической системы координат) материальных частиц металлической пластины в произвольной точке объема пластины через амплитуду  $U_{\Gamma}$  электрического потенциала на выходе генератора.

Слой контактной жидкости не передает касательные напряжения  $\sigma_{z\Gamma}^*$  и нормальные волны Лэмба возбуждаются исключительно напряжениями  $\sigma_{zz}^*$ . В объеме пьезоэлектрического диска возникают деформации, которые передают механический

импульс материальным частицам слоя жидкости. Те, в свою очередь, передают этот импульс материальным частицам поверхности полупространства в зоне механического контакта. От поверхности вглубь полупространства уходят упругие волны, которые формируют смещение материальных частиц, акустической нагрузки, т.е. упругого полупространства. Комплексная передаточная характеристика преобразователя в режиме возбуждения упругих волн будет определяться следующим образом:

$$W^u(\omega, \vec{r}) = \frac{\vec{u}(\rho, z)e^{i\omega t}}{U_{\vec{A}}e^{i\omega t}} = \frac{\vec{u}(\rho, z)}{U_{\vec{A}}} \quad (1)$$

Расчет передаточных характеристик пьезокерамического диска был выполнен по стандартной методике [3].

Под действием разности электрических потенциалов в объеме диска развивается обратный пьезоэлектрический эффект, в результате чего его материальные частицы смещаются на некоторую величину  $u(x_k)e^{i\omega t}$  из положения равновесия.

Амплитуда  $u(x_k)$  гармонически изменяющегося во времени вектора смещения материальных частиц удовлетворяет второму закону Ньютона в дифференциальной форме, математическая формулировка которого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x_k)}{\partial x_j} + \rho_0 \omega^2 u_i(x_k) = 0; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – амплитудное значение компонентов тензора результирующих механических напряжений в объеме деформируемого диска;  $\rho_0$  – плотность пьезокерамики;  $u_i(x_k)$  –  $i$ -й компонент вектора  $u(x_k)$ .

Компоненты  $\sigma_{ij}(x_k)$  определяются обобщенным законом Гука для упругих тел с пьезоэлектрическими свойствами, который записывается [4] следующим образом:

$$\sigma_{ij}(x_k) = \tilde{\eta}_{ijke}^A \varepsilon_{ke}(x_k) - e_{kij} E(x_k). \quad (3)$$

Амплитудные значения компонентов  $u_\rho(\rho, z)$  и  $u_z(\rho, z)$  гармонически изменяющегося во времени вектора  $\vec{u}(\rho, z)$  смещения материальных частиц пьезокерамического диска удовлетворяют уравнениям установившихся колебаний:

$$s_{rr,r} + s_{rz,z} + (s_{rr} - s_{jj})/r + r_0 w^2 u_r(r, z) = 0$$

$$\forall (r, z) \in V, \quad (4)$$

$$s_{rz,r} + s_{zz,z} + s_{rz}/r + r_0 w^2 u_z(r, z) = 0$$

$$\forall (r, z) \in V.$$

При  $u_r = 0$  уравнения (4) сводятся к одному, а именно:

$$\frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + r_0 w^2 u_z = 0. \quad (5)$$

Граничные условия – третий закон Ньютона на границе раздела пьезокерамика – тыловая акустическая нагрузка ( $z = a$ ) и пьезокерамика – согласующий слой жидкости ( $z = 0$ ):

$$s_{zz}|_{z=0} = 0, \quad s_{zz}|_{z=a} = s_{zz}^{\dot{d}}|_{z=a}. \quad (6)$$

Условия кинематического сопряжения

$$u_z|_{z=0} = W, \quad u_z|_{z=a} = u_z^{\dot{d}}|_{z=a}. \quad (7)$$

В соотношениях (6) и (7) символами  $s_{zz}^{\dot{d}}$  и  $u_z^{\dot{d}}$  обозначены напряжение и смещение материальных частиц в объеме тыловой акустической нагрузки.

Решение (5) при выполнении (6) и (7), т.е. аксиальные смещения  $W$  материальных частиц поверхности диска ( $z = 0$ ) можно, в первом приближении, описать следующим образом:

$$W = -U_{\Gamma} \frac{e_{33}}{c_{33}^D} \cdot \frac{(a_{22} - a_{12})}{\{ga [1 + iwR_{\vec{A}} C_0^E (ga)] (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})\}}, \quad (8)$$

где  $e_{33}$  – пьезомодуль поляризованной по толщине диска пьезокерамики;  $c_{33}^D = c_{33}^E (1 + K^2)$

- модуль упругости;  $K^2 = e_{33}^2 / (c_{33}^E c_{33}^E)$  - квадрат коэффициента электромеханической связи пьезокерамики;  $c_{33}^E$  - диэлектрическая проницаемость;  $g = w / \sqrt{c_{33}^D / r_0}$  - волновое число;

$r_0$  - плотность пьезокерамики;  $C_0^E = pR^2 c_{33}^E / a$  - статическая электрическая емкость электродированного пьезокерамического диска радиуса  $R$ ;

$$F(ga) = \frac{K^2}{1 + K^2} \cdot \frac{[(a_{22} - a_{12})(\cos ga - 1) + (a_{11} - a_{21}) \sin ga]}{[ga(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})]};$$

$$a_{11} = \frac{K^2}{1 + K^2} \cdot \frac{(1 - \cos ga)}{ga};$$

$$a_{12} = 1 - \frac{K^2}{1 + K^2} \cdot \frac{\sin ga}{ga};$$

$$a_{21} = -\sin ga + \frac{K^2}{1 + K^2} \cdot \frac{(1 - \cos ga)}{ga} + ix_0 \cos ga;$$

$$a_{22} = \cos ga - \frac{K^2}{1 + K^2} \cdot \frac{\sin ga}{ga} + ix_0 \sin ga;$$

$x_0$  - относительный акустический импеданс материала тыловой акустической нагрузки.

Электрический импеданс колеблющегося диска обозначим  $z_{y\bar{e}}(w)$ . Тогда, как это следует из расчетной схемы, которая приведена на рис. 1, будем иметь, что

$$U_0 = U_{\bar{A}} \frac{z_{y\bar{e}}(w)}{R_{\bar{A}} + z_{y\bar{e}}(w)}. \quad (9)$$

Для того, чтобы определить электрический импеданс  $z_{y\bar{e}}(w)$ , воспользуемся законом Ома для участка электрической цепи и запишем

$$z_{y\bar{e}}(w) = U_0 / I, \quad (10)$$

где  $I$  - амплитудное значение тока, который протекает в проводниках.

Электрический ток  $I$  в проводниках определяется через амплитуду полного электрического заряда  $Q$  пьезокерамического диска следующим образом:

$$I = -iwQ. \quad (11)$$

Полный электрический заряд  $Q$  определяется через аксиальный компонент  $D_z$  вектора электрической индукции:

$$Q = \int_S D_z dS = pR^2 D_z, \quad (12)$$

где  $D_z$  определяется выражением:

$$D_z = -c_{33}^e \frac{U_0}{a} \left\{ \frac{k_3^2}{1+k_3^2} \cdot \frac{[(\dot{a}_{22}-\dot{a}_{12})(\cos ga-1)+(\dot{a}_{11}-\dot{a}_{21})\sin ga]}{ga(\dot{a}_{11}\dot{a}_{22}-\dot{a}_{21}\dot{a}_{12})} + 1 \right\}. \quad (13)$$

Из последнего соотношения следует, что

$$Q = -\tilde{N}_0^e U_0 F(ga). \quad (14)$$

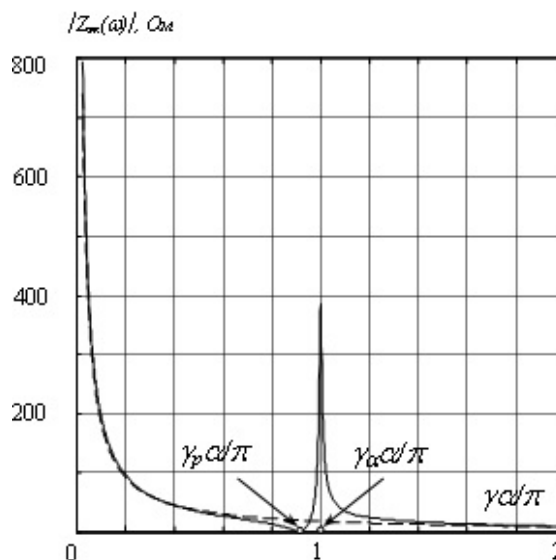
Подставляя выражение (14) в определение (11) амплитуды тока в проводниках, получаем окончательный результат в следующем виде:

$$z_{y\bar{e}}(w) = \frac{1}{iw\tilde{N}_0^e F(ga)}. \quad (15)$$

При  $k_3^2 = 0$ , т.е. когда отсутствуют пьезоэлектрические эффекты в диэлектрике между электродами, функция  $F(ga) = 1$  и выражение (15) превращается в известную из электротехники формулу для расчета реактивного сопротивления конденсатора.

При  $k_3^2 \neq 0$  функция  $F(ga)$  весьма сложнейшим образом зависит от безразмерного волнового числа  $ga$  или, что тоже самое, от безразмерной частоты  $wt_0$ , где  $t_0 = a/V^D$ ;  $V^D = \sqrt{\tilde{n}_{33}^D / r_0}$  - скорость распространения волн сжатия-растяжения вдоль оси  $Oz$  в материале пьезоэлектрического диска.

На рис.2 показано частотно-зависимое изменение модуля электрического импеданса диска из пьезокерамики ЦТС-19 (сплошная кривая).



**Рисунок 2 – Частотная зависимость модуля электрического импеданса пьезоэлектрического диска без тыловой акустической нагрузки**

Радиус диска  $a = 1$  мм ( $c_{33}^E = 106$  ГПа,  $\dot{a}_{33} = 10$  кл/м<sup>2</sup>,  $r_0 = 7400$  мг/м<sup>3</sup>,  $c_{33}^e = 1500c_0$ ;  $c_0 = 8,85 \cdot 10^{-16}$  Ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума). Тыловая акустическая нагрузка отсутствует ( $x_0 = 0$ ).

Добротность пьезокерамики  $Q_g = 100$ . По оси ординат на рис. 2 откладываются значения модуля компенсационной величины  $z_{y\bar{e}}(w)$  в Омах. По оси абсцисс - безразмерное волновое число  $ga/p$  или безразмерная частота  $wt_0/p$ ,

где  $t_0 = a / V^D$ ,  $V^D = \sqrt{\tilde{n}_{33}^D / r_0}$  – скорость распространения упругих колебаний сжатия-растяжения в пьезокерамике в направлении оси  $Oz$ .

Штриховой кривой на рис. 2 показано изменение реактивного сопротивления диска в случае отсутствия в диэлектрике пьезоэлектрических эффектов.

Для сплошной кривой характерны две особые точки на оси безразмерных частот или волновых чисел. На частоте  $w_r$ , которой соответствует безразмерное волновое число  $g_r^a$ , модуль электрического импеданса достигает минимального значения и при отсутствии потерь в материале пьезоэлектрика  $z_{ye}(w_r)$  обращается в нуль. На другой частоте, которую обозначим  $w_a$  и которой соответствует безразмерное волновое число  $g_a^a$ , модуль  $z_{ye}(w_a)$  принимает максимальное значение и в пределе, при  $Q \rightarrow \infty$ , обращается в бесконечность.

Причина такого поведения физической системы заключается во взаимодействии электрических зарядов, которые формируются генератором электрических сигналов путем зарядки электрической емкости  $\tilde{N}_0^e$  и упругими деформациями пьезокерамики. Этот заряд будем называть поляризационным и обозначим символом  $Q_i$ . Если электрический заряд емкости  $\tilde{N}_0^e$  обозначить символом  $Q_0$ , то поляризационный заряд  $Q_i = Q_0 [F(g_a) - 1]$ .

На частоте  $w_r$  электрический заряд  $Q_i$  имеет одинаковые фазы и внутреннее электрическое поле складывается с внешним полем. В результате такого сложения напряженность результирующего поля  $A_z$  увеличивается и возрастает уровень упругих деформаций пьезокерамической пластинки.

При этом естественно увеличивается уровень поляризационного заряда  $Q_i$  и вновь происходит увеличение напряженности  $A_z$  результирующего электрического поля. Смещение потенциальных частиц пьезоэлектрика увеличивается, сообразно этому увеличивается деформация и вновь возрастает поляризационный заряд  $Q_i$ .

В случае идеального генератора, гармонически изменяющиеся во времени разности электрических потенциалов амплитуды смещения материальных частиц  $U_z$  пьезоэлектрического диска, существенно возрастают. В пределе, при  $Q_g \rightarrow \infty$ , они

становятся бесконечно большими. При этом формируются неограниченно большие поляризационные заряды и по проводникам протекают электрические токи бесконечно большой амплитуды.

Указанная ситуация возникает тогда, когда  $|z_{ye}(w_r)| = 0$ , т.е. в электрической цепи генератор – электрическая нагрузка реализуется режим короткого замыкания. При этом электрическая нагрузка, т.е. колеблющейся пьезокерамический диск, потребляет от генератора электрических сигналов максимально возможное количество энергии.

Функциональное состояние любой системы, которая функционирует за счет энергии внешнего источника, при котором система потребляет максимальное количество энергии от источника, называется резонансом. По этой причине частота  $w_r$  называется частотой резонанса, а физическое состояние колеблющегося диска называется электромеханическим резонансом.

В реальной ситуации на частоте электромеханического резонанса  $w_r$  по проводникам протекают токи конечной амплитуды. Это объясняется двумя причинами. Во-первых любой генератор электрических сигналов имеет конечное (и не нулевое) значение выходного сопротивления. Падение напряжения на этом сопротивлении ограничивает нарастание амплитуды электрического тока. Во-вторых, все реально существующие пьезоэлектрики обладают внутренними потерями, которые интегрально определяются добротностью  $Q_g$  материала. При этом реальный модуль упругости  $\tilde{n}_{33}^A = i \tilde{n}_{33}^A (1 + i / Q_g)$ , где  $i \tilde{n}_{33}^A$  – числовое значение модуля упругости, которое указывается в справочнике. Это значение можно еще называть квазистатическим модулем упругости.

Потери энергии в материале пьезоэлектрика ограничивают рост амплитуд смещений материальных частиц. На частоте  $w_r$ , когда  $g_a a = p$ , электрический заряд  $Q_0 \approx -Q_i$  и суммарный электрический заряд  $Q_0 \approx 0$ . В пределе  $Q_g \rightarrow \infty$ , суммарный заряд  $Q = 0$ . Пьезокерамический диск перестает потреблять энергию от генератора электрических сигналов. По этой причине частота  $w_a$  называется частотой электромеханического антирезонанса, а само физическое состояние колебательной системы – электромеханический антирезонанс.

Следует особо подчеркнуть, что электромеханический антирезонанс наблюдается только в пьезоэлектрических излучателях

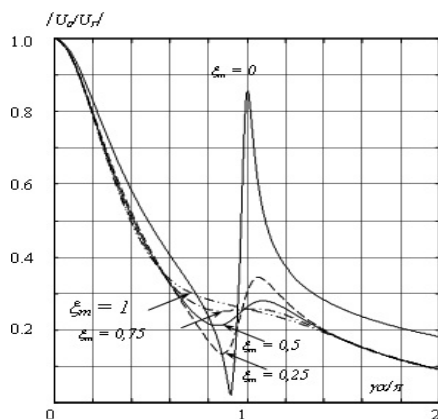
ультразвуковых волн, т. е. в колебательных системах, которые приводятся в движение генератором электрических сигналов. В приемниках ультразвуковых волн явление электромеханического антирезонанса отсутствует по определению.

Уменьшению силы тока в проводниках соответствует увеличение электрического импеданса  $Z_{y\check{e}}(w_a)$  электрической нагрузке генератора, т. е. колеблющегося диска, что показано на рис. 2.

Подставляя выражение (15) в определение (9) разности электрических потенциалов  $U_0$  на электродированных поверхностях диска, получаем

$$U_0 = \frac{U_{\check{A}}}{1 + iwR_{\check{A}}\check{N}_0^e F(ga)} \quad (16)$$

На рис.3 показаны графики изменения модуля отношения  $U_0/U_{\check{A}}$  на различных частотах при различных значениях относительного акустического импеданса  $x_0$  тыловой акустической нагрузки. Расчет выполняется при тех же значениях физико-механических и геометрических параметров пьезокерамического диска, которые были приняты при вычислении модуля электрического импеданса  $Z_{y\check{e}}(w)$ , результаты которых показаны на рис.2. Выходное сопротивление генератора  $R_{\check{A}} = 50 \text{ Ом}$ . Числовые значения параметра  $x_0$  поставлены возле кривых в поле рисунка. По оси абсцисс, как и ранее, откладывается безразмерное волновое число в долях числа  $p$ , т.е.  $ga/p$ .



**Рисунок 3 – Изменение разности электрических потенциалов  $U_0$  в зависимости от значения относительного акустического импеданса  $x_m$  тыловой акустической нагрузки преобразователя**

Как следует из выражения (16) на нулевой частоте  $|U_0/U_{\check{A}}|=1$ . По мере роста частоты реактивное сопротивление пьезоэлектрического диска быстро уменьшается и все большая часть разности электрических потенциалов  $U_{\check{A}}$  выделяется на выходном сопротивлении генератора  $R_{\check{A}}$ . Чем больше диаметр диска, тем больше его электрическая емкость и тем меньше становится соотношение  $U_0/U_{\check{A}}$ .

Отсюда можно сделать вывод о том, что для конструирования высокочастотных ультразвуковых преобразователей, которые работают в режиме излучения упругих волн, необходимо использовать диски с минимально возможными диаметрами.

На частоте электромеханического резонанса электрический импеданс колеблющегося диска принимает минимальное значение и, соответственно, становится минимальным соотношение  $|U_0/U_{\check{A}}|$ . На частоте электромеханического антирезонанса отношение  $|U_0/U_{\check{A}}|$  имеет локальный максимум. Хорошо заметно, что с ростом параметра  $x_0$  происходит сглаживание локальных экстремумов в частотной зависимости отношения  $|U_0/U_{\check{A}}|$ . Это дает основания для предположения о том, что тыловая акустическая нагрузка является элементом управления и коррекции частотной характеристики пьезопреобразователя.

Далее необходимо перейти к моделированию передачи акустического сигнала через согласующий слой жидкости. Слой жидкости (рис. 1) имеет конечную толщину  $d$  и силами поверхностного натяжения ограничен боковой поверхностью  $r=R$ . Кривизна боковой поверхности  $r=R$ , показанная на рис. 1, ввиду малости толщины слоя при выполнении расчетов не будет учитываться.

На поверхности слоя  $z=0$  заданы аксиальные смещения материальных частиц жидкости, что описываются вектором  $\mathbf{u}^{ae}(r, z)$ , который в соответствии с теоремой Гельмгольца может быть определен через скалярный потенциал  $\Phi(r, z)$  стандартным образом, т. е.  $\mathbf{u}^{ae}(r, z) = grad\Phi(r, z)$ .

Потенциал  $\Phi(r, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\Phi(r, z) + k_{ae}^2\Phi(r, z) = 0, \quad (17)$$

где  $k_{ae} = w/v_{ae}$  - волновое число;  $v_{ae}$  - скорость звука в жидкости, и граничным условиям

$$\begin{aligned} \Phi(r, z)|_{r=R} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= W, \\ \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-d} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку рассматриваемая задача по сути постановки является осесимметричной, постольку уравнение (17) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0 \quad (19)$$

Предположим, что скалярный потенциал  $\Phi(r, z)$  можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от радиальной координаты, а вторая – только от координаты  $z$ , т. е.

$$\Phi(r, z) = R(r) \cdot Z(z). \quad (20)$$

Подставляя представление (20) в уравнение (19), получаем, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) Z + R \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 RZ = 0 \quad (21)$$

Разделим уравнение (21) на произведение  $RZ$  и запишем полученный результат в следующем виде:

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \right] + k^2 = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \quad (22)$$

Левая часть равенства (22) зависит только от переменной  $r$ , а правая – от переменной  $z$ . В функциональном анализе доказывается, что равенство (22) может выполняться для произвольных значений  $r$  и  $z$  только в том случае, когда левая и правая части соотношения (22) равняются одной и той же константе, которая называется константой разделения. Методика приведения уравнения (19) к соотношению (22) называется методом разделения переменных или методом Фурье. Для удобства дальнейших записей обозначим константу разделения символом  $b^2$ , т.е. будем считать ее численно равной квадрату некоторого числа  $b$ . Это число подлежит определению в ходе решения задачи.

Таким образом, уравнение (22) распадается на два самостоятельных уравнения:

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \right] + k^2 = b^2, \quad (23)$$

$$- \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = b^2. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) имеет следующий вид:

$$Z(z) = A^* \cos bz + B^* \sin bz, \quad (25)$$

где  $A^*$  и  $B^*$  – подлежащие определению константы.

Уравнение (23) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 - b^2)R = 0 \quad (26)$$

Если обозначить  $g^2 = k^2 - b^2$ , то общее решение уравнения (26) необходимо записать в следующем виде:

$$R(r) = C J_0(gr), \quad (27)$$

где  $C$  – константа;  $J_0(gr)$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Подставляя выражения (25) и (27) в определение (20), получаем следующую конструкцию:

$$\Phi(r, z) = J_0(gr) [A \cos bz + B \sin bz], \quad (28)$$

где  $A = A^* \tilde{N}$  и  $B = B^* \tilde{N}$ .

Так как условие (18) эквивалентно требованию  $\Phi(r, z) = 0, \forall z \in [0, -d]$ , то из выражения (28) следует, что:

$$J_0(gr) = 0. \quad (29)$$

На рис. 4 показан график изменения функции  $J_0(x)$ . Видно, что при некоторых значениях аргумента  $q_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) функция Бесселя нулевого порядка принимает нулевое значение.

Величина  $q_n$  называется корнями функции  $J_0(x)$ . Сама величина  $q_n$ , называется  $n$ -ным корнем функции  $J_0(x)$ . Числовые значения первых пяти корней функции  $J_0(x)$  таковы:  $q_1=2,404826$ ;  $q_2=5,520078$ ;  $q_3=8,653728$ ;  $q_4=11,791534$ ;  $q_5=14,930918$ .

Несложно заметить, что  $q_n \approx q_{n-1} + p$ . При этом приближенное равенство выполняется тем точнее, чем больше номер корня. Так, пятый и четвертый корни функции  $J_0(x)$  отличаются друг от друга на  $0,999297p$ , десятый и

одиннадцатый – на  $0,999879p$ , четырнадцатый и пятнадцатый – на  $0,999937p$ , девятнадцатый и двадцатый – на  $0,999966p$ .

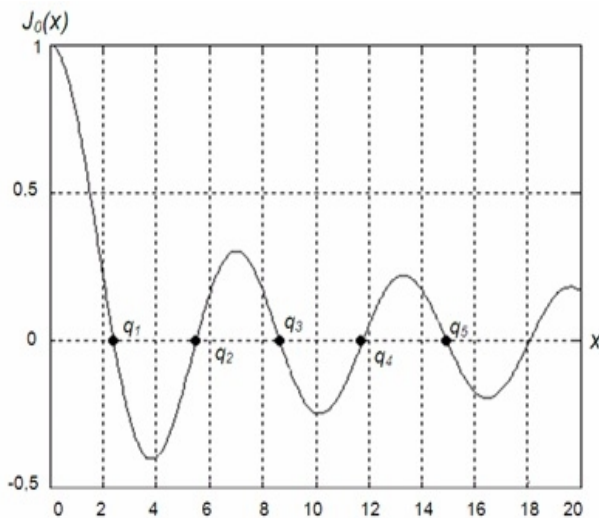


Рисунок 4 – Изменение функции  $J_0(x)$

Если предположить, что точность выполнения инженерных расчетов ограничивается четвертой значащей цифрой после запятой, то можно говорить, что для номеров  $n \geq 20$  выполняется точное равенство  $q_n = q_{n-1} + p$ .

Из уравнения (29) следует, что  $g_n R = q_n$ , что эквивалентно равенству  $k^2 - b_n^2 = q_n^2 / R^2$ . Из этого равенства следует определение константы разделения  $b_n$ :

$$b_n = \sqrt{k^2 - q_n^2 / R^2}, \quad (30)$$

где  $k = w/n_e$  – волновое число упругих колебаний жидкости;  $n_e$  – скорость звука в жидкости.

Принимая во внимание множественность констант разделения  $b_n$ , общее решение (28) необходимо записать в следующем виде:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(q_n r / R) [A_n \cos b_n z + B_n \sin b_n z] \quad (31)$$

Константы  $A_n$  и  $B_n$  определяются из условий на поверхностях  $z = 0$  и  $z = -d$ .

Слой жидкости находится на поверхности твердого тела, тогда смещение материальных частиц жидкости описывается выражением

$$u_z^e(r, z) = \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(q_n r / R) b_n [-A_n \sin b_n z + B_n \cos b_n z] \quad (32)$$

отсюда условие (18) эквивалентно утверждению, что  $A_n \sin b_n d + B_n \cos b_n d = 0$ , откуда следует определение коэффициентов  $B_n$ :

$$B_n = -A_n \operatorname{tg} b_n d \quad (33)$$

Подставляя выражение (33) в определение (32) аксиального компонента вектора смещения материальных частиц жидкости, получаем

$$u_z^e(r, z) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n A_n J_0(q_n r / R) [\sin b_n z + \operatorname{tg} b_n d \cos b_n z] \quad (34)$$

Из выражения (34) и граничного условия (18) следует, что

$$W_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n A_n J_0(q_n r / R) \operatorname{tg} b_n d \quad (35)$$

Для определения констант  $A_n$  обратимся к известному [4] интегралу

$$\int x J_n(ax) J_n(bx) dx = \frac{x}{a^2 - b^2} [a J_{n+1}(ax) J_n(bx) - b J_n(ax) J_{n+1}(bx)]$$

Если под символом  $x$  понимать отношение  $r/R$ , порядок бесселевых функций принять равным нулю, а параметры  $a$  и  $b$  определить как корни  $q_n$  и  $q_m$  соответственно, то определенный интеграл

$$\int_0^1 x J_0(q_n x) J_0(q_m x) dx = \begin{cases} 0, & \forall n \neq m \\ \frac{1}{2} J_1^2(q_n), & \forall n=m \end{cases} \quad (36)$$

О определенный интеграл (36) дает основания для выполнения следующих действий. Умножим левую и правую части равенства (36) на функцию Бесселя  $J_0(q_n r / R)$  и на безразмерный параметр  $r/R$ . Проинтегрируем полученные результаты по переменной  $x = r/R$  в пределах от 0 до 1. Выполнив указанные действия, получаем, что

$$-\frac{1}{2} b_n A_n J_1^2(q_n) \operatorname{tg} b_n d = \int_0^1 (r/R) W_0(r) J_0(q_n r / R) d(r/R)$$



откуда следует, что

$$A_n = -\frac{2}{b_n J_1^2(q_n) \operatorname{tg} b_n d} \times \int_0^1 (r/R) W_0(r) J_0(q_n r/R) d(r/R) \quad (37)$$

В частном случае, когда  $W_0(r) = W_0$ , т.е. аксиальные смещения поверхности  $z = 0$  не зависят от значений радиальной координаты  $r$ , из общего выражения (37) следует, что

$$A_n = -\frac{2W_0}{b_n q_n J_1(q_n) \operatorname{tg} b_n d} \quad (38)$$

Таким образом, скалярный потенциал  $\Phi(r, z)$  определяется следующим выражением:

$$\Phi(r, z) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(q_n r/R)}{b_n J_1^2(q_n) \operatorname{tg} b_n d} [\cos b_n z - \operatorname{tg} b_n d \sin b_n z] \times \int_0^1 (r/R) W_0(r) J_0(q_n r/R) d(r/R) \quad (39)$$

или, в частном случае  $W_0(r) = W_0$ ,

$$\Phi(r, z) = -2W_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(q_n r/R)}{b_n q_n J_1(q_n) \operatorname{tg} b_n d} \times [\cos b_n z - \operatorname{tg} b_n d \sin b_n z] \quad (40)$$

Колебания поверхности  $z = 0$  слоя жидкости с амплитудой  $W_0$  трансформируются в нормальное давление  $s_{zz}^*(r)$  поверхности металлического листа, где потенциал  $\Phi(r, z)$  определяется либо по формуле (39), либо по формуле (40). Если взять за основу частный случай  $W_0(r) = W_0$ , то избыточное давление  $s_{zz}^*(r)$  в плоскости механического контакта слоя жидкости с твердым телом определяется следующим образом:

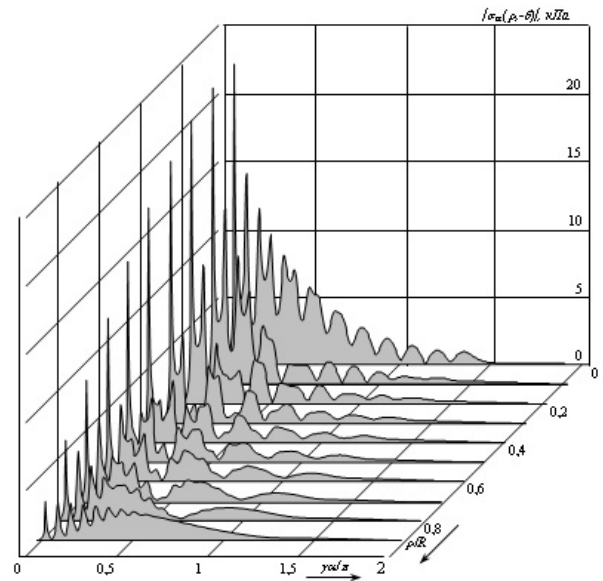
$$s_{zz}^*(r, -d) = 2w^2 r_{\text{ж}} W_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(q_n r/R)}{b_n q_n J_1(q_n) \sin b_n d} \quad (41)$$

где  $r_{\text{ж}}$  - плотность жидкости.

Из последнего выражения видно, что при  $d \rightarrow 0$ , т.е. слой жидкости исчезает, избыточное давление  $s_{zz}^*(r, -d) \rightarrow \infty$ . Это вполне понятно, потому что на поверхности абсолютно недеформируемого (твердого) тела внешними устройствами создаются конечные по величине аксиальные смещения материальных частиц. В приближении твердого (недеформируемого) тела этому процессу должны соответствовать

бесконечно большие усилия со стороны внешних устройств. Таким образом, при расчете преобразователя, который через слой жидкости нагружен на твердое тело (например, металл), нельзя пренебрегать толщиной слоя жидкости.

На рис. 5 показаны распределения напряжений  $s_{zz}^*(r, -d)$  по площадке механического контакта на различных частотах. В качестве меры частоты в данной серии расчетов использовалось безразмерное волновое число  $ga$ .



**Рисунок 5 – Частотно зависимое распределение аксиальных давлений в различных участках круговой площадки механического контакта преобразователя с упругим полупространством**

Расчеты выполнялись по формуле (41) с привлечением первых двадцати корней бесселевой функции нулевого порядка. Параметр  $d/R = 0,01$ .

Нормировка значений  $s_{zz}^*(r, -d)$  выполнялась относительно максимального значения давления, которое, естественно, наблюдается в центре площадки механического контакта. Как видно из представленных на рис. 5. графиков, неравномерность давления  $s_{zz}^*(r, -d)$  резко возрастает с ростом частоты. На высоких частотах, когда  $ga > 10$  максимальные значения давления концентрируются в узкой цилиндрической области в окрестности оси симметрии круглой площадки.

Все всплески – результат влияния слоя жидкости, которая является своеобразным резонатором.

Нужно сделать вывод, о необходимости конструктивно фиксировать толщину слоя согласующей жидкости по всей рабочей области преобразователя.

Следующий этап расчета передаточной характеристики пьезопреобразователя в режиме излучения – расчет компонентов вектора смещения материальных частиц в листовом металлопрокате.

Смещения  $\mathbf{u}(r, z)e^{i\omega t}$  материальных частиц металлической пластины толщиной  $2h$  определяются в результате решения следующей краевой задачи:

$$(I + 2G) \text{grad div} \mathbf{u}(r, z) - \text{Grotrot} \mathbf{u}(r, z) + r_i w^2 \mathbf{u}(r, z) = 0 \quad \forall (r, z) \in V, \quad (42)$$

$$s_{zr}(r, \pm h) = 0 \quad \forall r \in S, \quad (43)$$

$$s_{zz}(r, -h) = 0 \quad \forall r \in S,$$

$$s_{zz}(r, h) - s_{zz}^*(r) = 0 \quad \forall r \in S, \quad (44)$$

где  $I$ ,  $G$  и  $r_i$  - модули упругости и плотность металла;  $s_{zr}(r, \pm h)$  и  $s_{zz}(r, \pm h)$  - касательное и нормальное упругие напряжения на поверхностях  $S$  пластины;  $V$  - объем металла.

Решение граничной задачи (42) ÷ (44) выполняется с помощью интегральных преобразований Ханкеля [5] и может быть представлено в виде разложения по симметричным и антисимметричным относительно срединной поверхности пластины волнам Лэмба следующим образом:

$$\mathbf{u}(r, z)e^{i\omega t} = \left[ \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^s(r, z, g_n) + \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^a(r, z, g_m) \right] e^{i\omega t}, \quad (45)$$

где  $N$  и  $M$  - количество распространяющихся на данной частоте  $\omega$  симметричных и антисимметричных волн Лэмба с амплитудами векторов смещений материальных частиц  $\mathbf{u}^s(r, z, g_n)$  и  $\mathbf{u}^a(r, z, g_m)$  соответственно;  $g_n$  и  $g_m$  - корни дисперсионных уравнений  $\Delta_s(g_n) = 0$  и  $\Delta_a(g_m) = 0$ , которые имеют смысл условий существования распространяющихся симметричных (индекс  $s$ ) и антисимметричных (индекс  $a$ ) волн Лэмба и записываются в следующем виде:

$$\Delta_s(g_n) = (g_n^2 - b_n^2)^2 \cos(a_n h) \sin(b_n h) + 4g_n^2 a_n b_n \sin(a_n h) \cos(b_n h) = 0, \quad (46)$$

$$\Delta_a(g_m) = (g_m^2 - b_m^2)^2 \sin(a_m h) \cos(b_m h) + 4g_m^2 a_m b_m \cos(a_m h) \sin(b_m h) = 0, \quad (47)$$

где  $g_q$ ,  $b_q$  и  $a_q$  ( $q = n, m$ ) - проекции волновых векторов  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_s$ , не взаимодействующих продольных волн (индекс  $l$ ) и волн сдвига (индекс  $s$ ) на координатные оси  $r$  и  $z$ . Модули этих векторов  $k_1$  и  $k_s$  определяются частотой смены знака напряженно-деформированного состояния пластины по следующим формулам:

$$k_1 = w / \sqrt{(I + 2G) / r_0}, \quad k_s = w / \sqrt{G / r_0}. \quad \text{При этом } g_q^2 + a_q^2 = k_1^2 \text{ и } g_q^2 + b_q^2 = k_s^2.$$

Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}^s(r, z, g_n)$  материальных частиц в цилиндрическом фронте симметричной волны Лэмба определяются следующим образом

$$u_r^s(r, z, g_n) = U_0^s(g_n) u_r^s(z, g_n) H_1^{(2)}(g_n r), \\ u_z^s(r, z, g_n) = U_0^s(g_n) u_z^s(z, g_n) H_0^{(2)}(g_n r), \quad (48)$$

где  $U_0^s(g_n)$  - амплитудный множитель  $n$ -ой нормальной симметричной волны Лэмба, причем

$$U_0^s(g_n) = ip \frac{r_0}{2r_i} W(k_s R)^2 \frac{g_n b_n}{\Delta'_s(c_n)} J_0(g_n R) \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_n h \left[ q_n^2 - (g_n R)^2 \right] \sin b_n d}. \quad (49)$$

$H_n^{(2)}(g_n r)$  ( $n = 0, 1$ ) - функция Ханкеля

второго рода порядка  $n$ ;  $J_0(g_n R)$  - функция Бесселя нулевого порядка;  $\Delta'_s(c_n) = d\Delta_s(c_n) / dc_n$ ;  $c_n \equiv g_n^2$ ;  $u_q^s(z, g_n)$  ( $q = r, z$ ) - собственные функции

соответствующей однородной граничной задачи (44) ÷ (46). Выражения для расчета компонентов собственных функций имеют следующий вид:

$$u_r^s(z, g_n) = -[a_r^s \cos(a_n z) + b_r^s \cos(b_n z)], \\ u_z^s(z, g_n) = -[a_z^s \sin(a_n z) + b_z^s \sin(b_n z)] \quad (50)$$

где

$$a_r^s = \left[ (g_n h)^2 - (b_n h)^2 \right] \frac{\sin(b_n h)}{(b_n h)};$$

$$b_r^s = 2(a_n h) \sin(a_n h);$$

$$a_z^s = \left[ (g_n h)^2 - (b_n h)^2 \right] \frac{(a_n h) \sin(b_n h)}{(g_n h)(b_n h)};$$

$$b_z^s = -2 \frac{(g_n h)(a_n h) \sin(a_n h)}{(b_n h)}.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{u}^a(r, z, g_m)$  определяются следующими расчетными соотношениями:

$$\begin{aligned} u_r^a(r, z, g_m) &= U_0^a(g_m) u_r^a(z, g_m) H_1^{(2)}(g_m r), \\ u_z^a(r, z, g_m) &= U_0^a(g_m) u_z^a(z, g_m) H_0^{(2)}(g_m r), \end{aligned} \quad (51)$$

где  $U_0^a(g_m)$  - амплитудный множитель  $m$ -ой антисимметричной волны Лэмба, причем

$$U_0^a(g_m) = ip \frac{r_0}{2r_i} W(k_s R)^2 \frac{g_m (g_m^2 - b_m^2) \cos b_m h}{\Delta'_a(c_n) a_m} \times J_0(g_m R) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n h [a_n^2 - (g_m R)^2] \sin b_n d} \quad (52)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{u}^a(z, g_m)$  смещения материальных частиц в цилиндрическом фронте антисимметричной волны Лэмба определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_r^a(z, g_m) &= -[a_r^a \sin(a_m z) + b_r^a \sin(b_m z)], \\ u_z^a(z, g_m) &= [a_z^a \cos(a_m z) + b_z^a \cos(b_m z)]. \end{aligned} \quad (53)$$

где  $a_r^a = a_m h$ ;

$$b_r^a = -[(g_m h)^2 - (b_m h)^2] \cdot \frac{(a_m h) \sin(a_m h)}{2(g_m h)^2 \sin(b_m h)};$$

$$a_z^a = \frac{(a_m h)^2}{g_m h};$$

$$b_z^a = [(g_m h)^2 - (b_m h)^2] \cdot \frac{(a_m h) \sin(a_m h)}{2(g_m h)(b_m h) \sin(b_m h)}$$

Амплитудный множитель в выражении (49) и (52) можно представить в виде трех различных по своему характеру компонентов

Первый из них – это волновая характеристика –  $J_0(g_n R)$ , функция, которая описывает эффективность возбуждения от длины волны.

Второй – модальный коэффициент –  $(k_s R)^2 \frac{g_n b_n}{\Delta'_s(c_n)}$ , который отвечает за распределение энергии по модам.

И третий компонент – это частотная характеристика излучателя –  $W$ .

Если положить волновую характеристику приблизительно равной единице, т. е. случай, когда нагрузка локализована в маленьком пятне и не меняется, и аналогично частотную характеристику также приблизительно равной единице, то можно исследовать, как влияет модальный множитель на разброс энергии, которая подводится к поверхности металлической пластины.

На рис. 6 изображены спектры волновых чисел (синим) и уровни потоков мощности (красным), которые обеспечивают модельный источник, что имеет амплитуду нормального давления одинаковую на всех частотах.

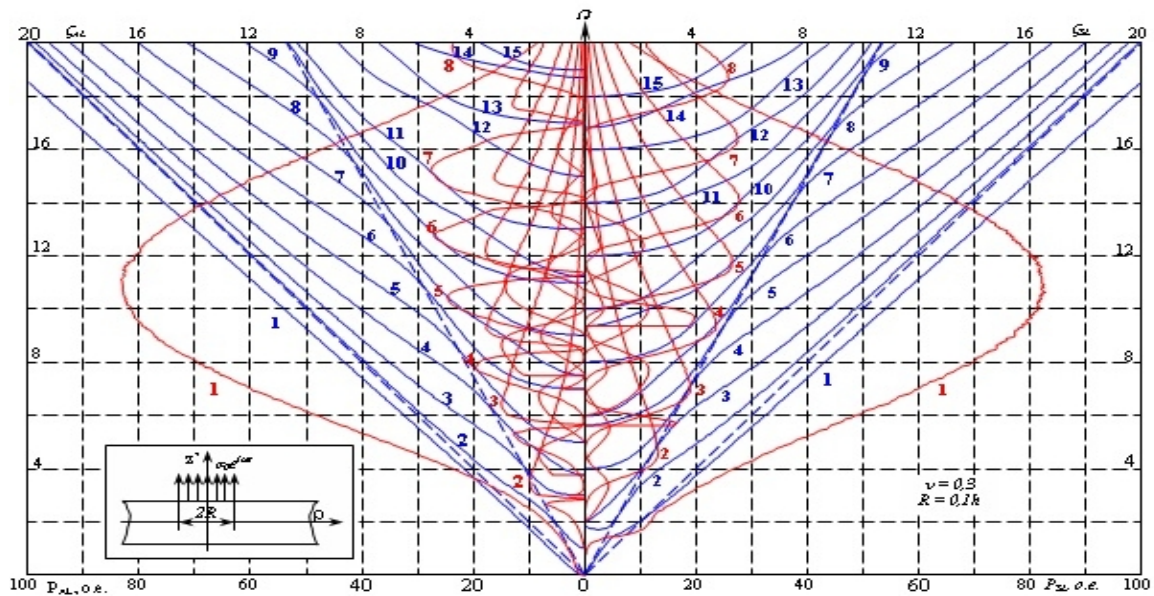


Рисунок 6–Волновые числа и потоки мощности радиально распространяющихся симметричных (правая полуплоскость) и антисимметричных (левая полуплоскость) волн Лэмба

Цель этого расчета – установить, то какие из нормальных волн являются главными при переносе энергии.

Практически во всем диапазоне частот доминирующими являются первая симметричная и первая антисимметричная волны Лэмба. Они берут на себя максимальное количество энергии и проносят вдоль поверхности листа.

Прочие нормальные волны имеют заметные уровни энергоемкости в начальной области своего существования и также берут на себя часть энергии. Из этого следует, что волна вместо того, чтобы формировать короткий импульс, создает растянутый в пространстве и времени сигнал, из-за чего уровень энергии падает.

Ставится задача обратить внимание на минимизацию возбуждения высших мод.

### ВЫВОДЫ

Предложена расчетная схема преобразователя контактного типа с пьезоэлектрическим элементом в форме диска. В результате анализа кинематических характеристик материальных частиц слоя жидкости при расчете передаточных характеристик пьезопреобразователя впервые был сделан вывод о необходимости учета как факта существования слоя согласующей жидкости, так и толщины этого слоя.

Показано, что для конструирования высокочастотных ультразвуковых преобразователей, необходимо использовать минимально возможный радиус диска. Впервые получены выражения для расчета амплитуд нормальных волн Лэмба, которые возбуждаются нормальными напряжениями, действующими на одной боковой поверхности листа. На модельном примере показано, что при возбуждении с

поверхности листа доминирующими по энергетике являются первая симметричная и первая антисимметричная радиально распространяющиеся волны Лэмба.

Совокупность полученных результатов является теоретической основой для последующей разработки алгоритмов минимизации систематических погрешностей ультразвукового тракта устройств неразрушающего контроля поверхности листового проката.

1. Данилов В.Н. Расчет акустического тракта дефектоскопа с прямыми круглыми преобразователями // Дефектоскопия. – 1996. – №10. – С. 11 – 17.
2. Данилов В.Н. К вопросу о расчете акустического поля прямого преобразователя с пьезопластинами различных форм // Дефектоскопия. – 2004. – № 2. – С. 3 – 15.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 283 с.
4. Интегралы и ряды. Специальные функции. Прудников А.П., Брыжков Ю.А., Маричев О.И. – М.: Наука, 1983. – 752с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Поступила в редакцію 27.11.2012р.

Рекомендував до друку докт. техн. наук, проф. Петрищев О. М.