УДК 622.673.1: 681.514.54

DOI: 10.31471/1993-9981-2019-2(43)-16-24

РЕДУКЦІЯ МОБІЛЬНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗДІЙСНЕННЯ ВІБРАЦІЙНОГО КОНТРОЛЮ

В. В. Лопатін

Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова Національної академії наук України, вул. Сімферопольська 2а, м. Дніпро, 49005. тел. (0562) 46-01-51, факс (0562) 46-24-26, nanu@igtm.dp.ua, vlop@ukr.net

Оскільки гірська і нафтогазова галузі відіграють вирішальну роль в економіці України, адекватність і правильна оцінка точності проведеного контролю має важливе державне значення. Побудовано математичну модель вимірювання МСК, яка визначає послідовність математичних операцій, які необхідно виконати, щоб отримати кількісні характеристики об'єктів контролю. Якщо існує функція, що є рішенням і що описує об'єкт МСК, то вона є редукцією до ідеальної МСК. Рішення задачі редукції (синтезу) МСК реалізується вибором конструкції і забезпечується таким зв'язком між сигналами на його вході і виході МСК, що приводить до найкращих результатів. Така постановка завдання редукції МСК має ряд недоліків. На результат виміру МСК завжди впливає цілий другорядних чинників. Їх вплив призводить до того, що виміряне значення певної величини відрізняється від значення, передбаченого моделлю виміру МСК на величину шуму (помилку експерименту), який носить випадковий характер. Рівень шуму МСК спричиняє істотний вплив на результат математичної обробки, і чим менше шум, тим краще результат редукції МСК. Якщо раніше завданням приладобудування було створення МСК, що забезпечує найменші спотворення результатів вимірювань, то при використанні математичних методів редукції завданням приладобудування є зменшення рівня випадкових шумів МСК. Приведене рішення реалізується вибором конструкції і забезпечується таким зв'язком між сигналами входу і виходу, що призводить до зменшення рівня випадкових шумів МСК. Опис підвищення можливостей МСК має нестійкість рішення рівняння по відношенню до помилок початкових даних, що є властивістю майже усіх інтегральних рівнянь і не залежить від способу їх рішення. Пропонований математичний метод редукції мобільної системи контролю (МСК) як один з варіантів регуляризації некоректно поставленої задачі виник і отримав подальший розвиток під впливом ідей академіка А.Н. Тихонова і професора Ю.П. Питьева. Автор пропонує по-іншому поглянути на завдання контролю і правильність оцінки точності МСК за рахунок зменшення рівня випадкових шумів. Автором запропонована реалізація МСК шляхом вибору конструкції і забезпечення таким зв'язком між сигналом на його вході і виході, яка призводить до найкращих результатів при вирішенні задач редукції. Автором запропонована модель МСК яка адаптується із застосуванням сучасних ідей і математичних методів.

Ключові слова: мобільна система контролю (МСК), редукція, оцінка точності, рівень випадкових шумів, модель яка адаптується, рівняння Фредгольма першого роду.

Так как горная и нефтегазовая отрасли играют решающую роль в экономике Украины, адекватность и правильная оценка точности проводимого контроля имеет важное государственное значение. Построена математическая модель измерения МСК, которая определяет последовательность математических операций, которые необходимо выполнить, чтобы получить количественные характеристики объектов контроля. Если существует функция, является решением и описывает объект МСК, то она редукцией к идеальной МСК. Решение задачи редукции (синтеза) МСК реализуется выбором конструкции и обеспечивается таким связью между сигналами на его входе и выходе МСК, что приводит к наилучшим результатам. Такая постановка задачи редукции МСК имеет ряд недостатков. На результат измерения МСК всегда влияет целый второстепенных факторов. Их влияние приводит к тому, что измеренное значение определенной величины отличается от значения, предусмотренного моделью измерения МСК на величину шума (ошибку эксперимента), который носит случайный характер. Уровень шума МСК вызывает существенное влияние на результат математической обработки, и чем меньше шум, тем лучше результат редукции МСК. Если раньше задачей приборостроения было создание МСК, что обеспечивает наименьшие искажения результатов измерений, то при использовании математических методов редукции задачей приборостроения является уменьшение уровня случайных шумов МСК. Приведенное решение реализуется выбором конструкции и обеспечивается таким связью между сигналами входа и выхода, что приводит к уменьшению уровня случайных шумов МСК. Описание повышение возможностей МСК имеет неустойчивость решения уравнения по отношению к ошибкам начальных данных, является свойством почти всех интегральных уравнений и не зависит от способа их решения. Предлагаемый математический метод редукции мобильной системы контроля (МСК) как один из вариантов регуляризации некорректно поставленной задачи возник и получил дальнейшее развитие под влиянием идей академика А.Н. Тихонова и профессора Ю.П. Питьева. Автор предлагает по-иному взглянуть на задачи контроля и правильность оценки точности МСК за счет уменьшения уровня случайных шумов. Автором предложена реализация МСК путем выбора конструкции и обеспечения такой связью между сигналом на его входе и выходе, которая приводит к наилучшим результатам при решении задач редукции. Автором предложена адаптируемая модель МСК с применением современных идей и математических методов.

Ключевые слова: мобильная система контроля (МСК), редукция, оценка точности, уровень случайных шумов, адаптируемая модель, уравнения Фредгольма первого рода.

Since the mining and oil and gas industries play a decisive role in the Ukrainian economy, the adequacy and proper assessment of the accuracy of the monitoring is of great national importance. A mathematical model for the measurement of MSCs is constructed, which determines the sequence of mathematical operations that must be performed to obtain the quantitative characteristics of the objects of control. If there is a function that is a solution and that describes the object of the MSC, then it is a reduction to the ideal MSC. The solution of the problem of reduction (synthesis) MSC is realized by the choice of design and is provided with such a connection between the signals at its input and output MSC, which leads to the best results. This formulation of the problem of reducing the MSC has several disadvantages. The MSC measurement result is always influenced by a number of minor factors. Their effect leads to the fact that the measured value of a certain value is different from the value predicted by the model of measurement of the ISC on the noise (experiment error), which is random. The noise level of MSCs has a significant effect on the result of mathematical processing, and the less the noise, the better the result of the reduction of MSCs. Previously, the task of instrumentation was to create an MSC that provides the least distortion of the measurement results, while using mathematical methods to reduce instrumentation the task of reducing instrumentation noise is MSC. The given solution is realized by the choice of design and is provided with such a connection between the input and output signals, which leads to a decrease in the level of random noise MSC. The description of MSC enhancement has the instability of the solution of the equation with respect to the initial data errors, which is a property of almost all integral equations and does not depend on the method of their solution. The proposed mathematical method of reduction of the mobile control system (MSC) as one of the variants of regularization of the incorrectly set problem arose and was further developed under the influence of the ideas of academician AN Tikhonov and Professor Yu.P. Pytiev . The author suggests taking a different look at the control tasks and the accuracy of assessing the accuracy of MCSs by reducing the level of random noise. The author proposed the implementation of the MCS by choosing a design and providing such a connection between the signal at its input and output, which leads to the best results in solving reduction problems. The author proposed an adaptable model of MCSs using modern ideas and mathematical methods.

Keywords: mobile control system (MCS), reduction, accuracy assessment, random noise level, adaptable model, Fredholm equations of the first kind.

Постановка проблеми.

Складність вібраційного контролю мобільних систем контролю (МСК) визначається складністю використаних алгоритмів обробки сигналів вібрацій у гірському або нафтогазовому обладнанні. У тому випадку коли сигнал вібрації у гірському або нафтогазовому обладнанні являє собою суму гармонійних і стаціонарних випадкових складових, то завданням аналізу є визначення амплітуд, частот і фаз гармонійних складових, спектральної щільності і закону розподілу енергетичних характеристик у заданій смузі частот. В околі нульової частоти відбувається різкий підйом спектральної щільності. Тому для вивчення таких процесів доводиться розрізняти дуже близькі частоти. У випадку мультиплікативної суміші вхідних сигналів (амплітуд віброзміщення, віброшвидкості і віброприскорення в точці контролю) основним завданням є виділення складових, що входять у добуток, і визначення параметрів цих складових.

Підвищити можливості МСК дозволяють математичні методи обробки сигналів. Для цього потрібно побудувати математичну модель вимірювання МСК, яка визначає послідовність математичних операцій, які необхідно виконати, щоб отримати кількісні характеристики об'єктів контролю. Якщо існує функція, що є рішенням і що описує об'єкт МСК, то вона є редукцією до ідеальної МСК. Рішення задачі редукції (синтезу) МСК реалізується вибором конструкції і забезпечується таким зв'язком між сигналами на його вході і виході МСК, що приводить до найкращих результатів. Така постановка завдання редукції МСК має ряд недоліків. На результат виміру МСК завжди впливає цілий другорядних чинників. Їх вплив призводить до того, що виміряне значення певної величини відрізняється від значення, передбаченого моделлю виміру МСК на величину шуму (помилку експерименту), який носить випадковий характер. Рівень шуму МСК спричиняє істотний вплив на результат математичної обробки, і чим менше шум, тим краще результат редукції МСК. Якщо раніше завданням приладобудування було створення МСК, що забезпечує найменші спотворення результатів вимірювань, то при використанні математичних методів редукції завданням приладобудування є зменшення рівня випадкових шумів МСК. Наше рішення реалізується вибором конструкції і забезпечується таким зв'язком між сигналами входу і виходу, що призводить до зменшення рівня випадкових шумів МСК. Опис підвищення можливостей МСК має нестійкість рішення рівняння по відношенню до помилок початкових даних, що є властивістю майже усіх інтегральних рівнянь і не залежить від способу їх рішення.В математиці їх називають некоректно поставленими. Математично обґрунтовані методи рішення некоректно поставлених завдань були розвинені академіком А.М. Тихоновим [1] і професором Ю.П. Питьєвим [2, 3]. Вони показали, що некоректні завдання є у певному сенсі недовизначеними, і вказали на можливість побудови стійких наближень до точного рішення, засновані на використанні додаткової інформації про рішення, після чого вони стають коректними [4-6].

Виклад основного матеріалу і результати дослідження Розглянемо завдання математичного опису (розробки математичної моделі) МСК. Нехай ς - сигнал на виході МСК, f - сигнал на його вході. МСК у відповідність вхідному сигналу f ставить сигнал Φf на його виході. Цей оператор перетворення позначимо буквою Φ. Оскільки при формуванні вихідного сигналу завжди існують випадкові невраховані завади (помилки округлення, шуми і так далі) то вважаємо, що сигнал на вході МСК пов'язаний з сигналом ς таким чином:

$$\varsigma = \Phi f + \varepsilon, \tag{1}$$

де ε - випадкова складова, що не враховується моделлю формування сигналу Φf. Для спрощення моделі вважаємо, що ε не залежить від f.

Позначимо через L ідеальний МСК, сигнал на виході якого Lf тотожньо дорівнює сигналу f на його вході (модель не передбачає його конкретної реалізації).

Нехай V лінійний оператор МСК, на вхід якої подається сигнал f. Тоді на виході МСК буде $\varsigma = \Phi f + \varepsilon$. Оскільки ми допустили, що V лінійний оператор МСК, то, якщо на його вхід подається комбінація двох сигналів f_1 *і* f_2 виду $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$ де β_1 *і* β_2 - числові коефіцієнти, то сигнал на виході матиме вигляд $\beta_1 V f_1 + \beta_2 V f_2$. Тобто, якщо V лінійний оператор МСК, то для будь-яких сигналів f_1 і f_2 і будь-кому β_1 і β_2 виконується рівність

$$V(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2) = \beta_1 V f_1 + \beta_2 V f_2.$$

Отже, якщо на вхід МСК V подається сигнал f , то на його виході сигнал матиме вигляд

$$V\varsigma = V\Phi f + V\varepsilon = L f + (V\Phi - L) f + V\varepsilon, \tag{2}$$

Якщо сигнал $V\varsigma$ порівняти з сигналом на виході ідеального МСК (МСК L), то видно, що доданок $V\varepsilon$ в залежності (2) ніяк не пов'язаний з вхідним сигналом і означає шум. Як видно, доданок $(V\Phi - L) f$ залежить від вхідного сигналу f і визначає міру спотворення істинного сигналу. Зрозуміло, що визначити міру спотворення $(V\Phi - L) f$ неможливо, виключаючи той випадок, коли $V\Phi = L$. В цьому випадку міра спотворення дорівнює нулю і вираз (2) набуде такого вигляду:

$$V\varsigma = f + V\varepsilon.$$

Зрозуміло, що, ми повинні прагнути до того, щоб міра спотворення *(VΦ - L) f* була якомога меншою для будь-якого *f*. Але від *V*, залежить і шум $V\varepsilon$. З цього витікає наступне: в МСК при заданому обмеженні на рівень шуму $V\varepsilon$ слід мінімізувати міру спотворення *(VΦ - L) f*, причому остання має бути мінімальною при будь-якому вхідному сигналі *f*.

Як було показано в роботах [2, 3, 5, 6], вхідні і вихідні сигнали широкого класу вимірювальних приладів описуються інтегральними рівняннями Фредгольма першого роду.

Нехай функція $f(x)$ представляється сумою тригонометричних функцій:

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=0}^{n} (f_{2i} \cos \theta_i x + f_{2i-1} \sin \theta_i x). \quad (3)$$

Тоді $2n+1$ чисел $(f_0, f_1, \ldots, f_{2n})$ повністю визначають функцію $f(x)$.

Дискретне представлення сигналу $f_i = f(x_i)$ зручно записати у вигляді вектора

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

де m - розмірність вектора $\overline{f}$.

Нехай

$$\varsigma(x) = \int_a^в K(x, y) f(y) dy.$$

Фіксуємо точку x_i, тоді число

$$\varsigma_i = \varsigma(x_i) = \int_a^в K(x_i, y) f(y) dy$$

обчислюється як площа криволінійної трапеції, обмеженою віссю $0y$, прямими $y = a$, $y = в$ і графіком функції $K(x_i, y) f(y) = z(y)$.

Замінимо цю площу сумою площ (дискретними значеннями), обмеженими віссю $0y$, прямими $y = y_i$, $y = y_{i+1}$ і графіком функції $z(y)$. Точки

y_j, $j = 1, \ldots, M+1$ ділять відрізок $[a, в]$ на M рівних частин. Тоді

$$\varsigma_i = \sum_{j=1}^{M} K(x_i y_j) f(y_j)(y_{j+1} - y_j) = \sum_{j=1}^{M} \kappa_{ij} f_j. \quad (4)$$

Вираз (4) є дискретним представленням функції $\varsigma(x)$. Звідки витікає наступне. Якщо вхідний і вихідний сигнали МСК пов'язані інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, і замість сигналів на вході і виході використовувати їх дискретні представлення, то МСК характеризується матрицею

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \ldots & \kappa_{1M} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \ldots & \kappa_{2M} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \kappa_{N1} & \kappa_{N2} & \ldots & \kappa_{NM} \end{pmatrix}.$$

Вираз (4) подамо у вигляді добутку матриці на вектор

$$\varsigma = \hat{E} f. \quad (5)$$

Ідеальна МСК характеризується одиночною матрицею

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Така МСК, що характеризується одиничною матрицею, передає сигнал з входу на вихід без спотворень. Одинична матриця є ознакою відсутності кореляції між похибками окремих вимірювань МСК.

У МСК числове значення кожної координати вектора задане з деякою помилкою, тому вираз (5) набуде такого значення:

$$\varsigma = \hat{E} f + \varepsilon, \quad (6)$$

де ε - випадковий вектор, кожна координата якого визначає невідому похибку вимірювання відповідної координати вектора $\hat{E} f$.

Вважаємо, середнє значення вектора ε, рівним нульовому вектору - $E\varepsilon = 0$, де E - символ математичного сподівання. Рівність нулю середнього значення вектора ε говорить про те, що похибки однаковою мірою можуть спричиняти як збільшення результатів вимірювання МСК, так і їх зменшення. Судити про інтенсивність середньої помилки можна за середнім значенням квадрата кожної координати ε_i; $E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma_i^2$.

Дисперсію кожної координати ε_i вважаємо відомою, як і математичне сподівання добутку $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, $i, j = 1,. N$. Цей добуток виражає статистичну залежність між ε_i і ε_j (коваріація величин ε_i і ε_j). Якщо помилки ε_i і ε_j вимірювання i-ої і j-й координат вектора $\hat{E}$ f незалежні, то $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$.

Знайдемо матрицю $\hat{V}$ за умови малого спотворення сигналу f на виході МСК.

Запишемо лінійне перетворення вектора $\bar{f}$ за допомогою деякої матриці $\hat{R}$:

$$\hat{R}\varsigma = \hat{R}(\hat{\Phi} f + \varepsilon) = \hat{R}\hat{\Phi} f + \hat{R}\varepsilon, \tag{7}$$

Допустимо, що нам вдалося знайти таку матрицю $\hat{R}$, яка для усіх f забезпечує справедливість виразу

$$\hat{R}\hat{L}\bar{f} = \hat{A}\bar{f},$$

де $\hat{A}$ - задана матриця. Результат дії добутку $\hat{R}\hat{L}\bar{f}$ співпадає з результатом дії $\hat{A}\bar{f}$. Таким чином,

$$\hat{R}\hat{L} = \hat{A}. \tag{8}$$

Із (8) витікає постановка завдання редукції МСК: знайти матрицю $\hat{R}$, що задовольняє рівняння (8). Якщо матриця $\hat{R}$ знайдена, то, помноживши ς на $\hat{R}$, ми вирішимо задачу синтезу МСК

$$\hat{R}\varsigma = \hat{R}\hat{L}\bar{f} + \hat{R}\varepsilon = \hat{A}\bar{f} + \hat{R}\varepsilon.$$

Проте, рівняння (8) не завжди розв’язується відносно $\hat{R}$.

Розглянемо, як змінюється рівень шуму. Оскільки $E\varepsilon = 0 = (0,0,.., 0)$, то середнє значення шуму $\varepsilon_0 = E\left[\hat{R}\varepsilon\right] = \hat{R}E\varepsilon$ також дорівнює нулю 0, а його інтенсивність $E\left|\varepsilon_2\right|^2$ обчислимо наступним чином:

$$E\left|\varepsilon\right|^2 = E\sum_{i=1}^{M}\varepsilon^2 = E\left|\hat{R}\varepsilon\right|^2 = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} RRE\left[\varepsilon\ \varepsilon\right] = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} R\,R\,\Sigma. \tag{9}$$

Вираз (8) має безліч рішень, так що кожному з них відповідає свій шум $\bar{R}\varepsilon$ на виході МСК. Зрозуміло, що слід розглянути таку редукцію МСК А, при якій вираз (9) має найменше значення за умови, $\hat{R}\hat{L} = \hat{A}$, де $\hat{R}$ і $\hat{A}$ - задані матриці, а $\tilde{\Sigma}$ - відома матриця коваріційшуму ε.

Нехай $f(\theta_0)$ означає амплітуду гармонічної складової вимірювального сигналу з частотою θ_0. Спектр сигналу на виході фільтру утворений множенням спектру $f(\theta)$ на передавальну функцію фільтру $K(\theta)$, тобто $\varsigma(\theta) = K(\theta)\, f(\theta)$. Подамо на вхід фільтру сигнал зі спектром $f(\theta) = 1$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Нехай неточність вимірювання спектру на виході фільтру лежить в межах 0,1% (10^{-4}). Оскільки $f(\theta) = 1$, то для даної смуги частот сигнал $\varsigma(\theta)$ може вважатися оцінкою передавальної функції $K(\theta)$ з похибкою не більше 0,1 %. Представимо два дискретні сигнали на виході фільтру МСК

$$\varsigma = \hat{K}_1\bar{f} + \varepsilon_1, \quad \text{де } K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}001 \end{pmatrix}$$

і

$$\varsigma = \hat{K}_2\bar{f} + \varepsilon_2, \quad \text{де } K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Рішення (9) при $A=L$ для цих двох випадків призводить до матриць

$$\hat{R}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&10^{3}\end{pmatrix}\ \text{і}\ \hat{R}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&10^{7}\end{pmatrix}.$$

Вирішуючи задачу редукції (2.28) для ідеального МСК, оператор якого L, отримаємо в результаті вектори $\hat{E}_1\varepsilon$ і $\hat{E}_2\varepsilon$, у яких істотно різні треті діагональні елементи матриць $\hat{R}_1$ і $\hat{R}_2$, що породжує нестійкість рішення задачі синтезу МСК. Для усунення вищеописаного недоліку, виберемо матрицю $\hat{R}$ такою, щоб $R\Phi$, було обмежене значенням $E|\hat{R}\varepsilon|^2$.

Розглянемо тотожність

$$\hat{R}\varsigma=\hat{R}\hat{\Phi}f+\hat{R}\varepsilon=Af+\left(\hat{R}\hat{\Phi}-\hat{A}\right)f+\hat{R}\varepsilon,\quad(10)$$

де R - довільна матриця. Вектор $R\varsigma$ можна розглядати як сигнал з виходу МСК, спотворений шумом $\hat{R}\varepsilon$ і сигналом похибки $\left(\hat{R}\hat{\Phi}-A\right)\bar{f}$. Виберемо у формулі (10), матрицю R так, щоб вираз $\left(\hat{R}\hat{\Phi}-A\right)\bar{f}+\hat{R}\varepsilon$ був би мінімальним. Сигнал похибки $\left(\hat{R}\hat{\Phi}-A\right)f$ нам невідомий. Він залежить від невідомого вхідного вектора f. Проте, сигнал похибки $\left(\hat{R}\hat{\Phi}-A\right)f$ формується з f матрицею і він тим менше, чим ближче до нуля її матричні елементи. Близькість до нуля вимірюватимемо сумою квадратів усіх матричних елементів матриці $\hat{N}$:

$$\left|\hat{R}\hat{\Phi}-A\right|^2=\left|\hat{C}\right|^2=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^2.$$

Розглянемо задачу мінімізації відмінності матриці $\hat{R}\hat{\Phi}$ від заданої матриці $\hat{A}$, вибором матриці $\hat{R}$ такою, щоб середня енергія шуму $R\hat{\varepsilon}$ була обмеженою

$$E\left|\hat{R}\varepsilon\right|^2=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}R_{ij}R_{ik}\Sigma_{jk}\leq\ddot{a},$$

тобто

$$\min_{\hat{R}}\left|\hat{R}\hat{\Phi}-A\right|^2 E\left|\hat{R}\varepsilon\right|^2\leq\ddot{a},\quad(11)$$

$\hat{A}$ - фіксована величина.

Якщо $\hat{R}$ - рішення задачі (10), то сигнал $\hat{R}\varsigma$ розглядається як вихідний сигнал МСК з оператором $\hat{R}\hat{\Phi}$, що відрізняється від заданого оператора $\hat{A}$ на величину $\left|R\Phi-\hat{A}\right|$; при цьому шум на виході МСК обмежений. Синтезований таким чином МСК з оператором $\hat{R}\Phi$ (при обмеженнях на рівень шуму ∂) відрізняється від МСК з оператором $\hat{A}$. Ця відмінність характеризується величиною сигналу похибки і визначається параметром

$$F=\left|\hat{R}\Phi-A\right|^2.$$

Параметри $F=\left|\hat{R}\hat{\Phi}-A\right|^2$ і $G=\dfrac{E|\hat{R}\varepsilon|^2}{E|\varepsilon|^2}$ - паспортні дані МСК, які дають змогу оцінити можливості редукції до математичної обробки сигналу.

Маючи оперативну характеристику МСК можна вибрати оптимальний режим вимірювання. Параметр G вказує, в скільки разів зміниться рівень шуму МСК при заданих параметрах редукції.

Відомо, що точність вимірювання координати тим вище, чим більше часу вона вимірюється, але підвищити цю точність можна тільки за рахунок пониження точності вимірювання інших координат. Виникає питання: скільки часу слід вимірювати кожну координату вектора ς для досягнення необхідної точності.

Допустимо, що вимірювання здійснюються в фіксовані моменти часу $t_1,t_2,\ldots,t_M$. Розглянемо наступну задачу синтезу каналу контролю МСК:

№ 2 (43) 2019 ISSN 2415-3575 online

$$\min: \sum_{i=1}^{M} \frac{t_i(\varsigma_i - k_i f)^2}{\sigma_i^2}. \qquad (12)$$

Прирівнявши до нуля похідну по f від виразу (11), отримаємо

$$\hat f = \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\varsigma_i k_i t_i}{\sigma_i^2}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{k_i^2 t_i}{\sigma_i^2}\right).$$

Оскільки $\varsigma_i = k_i f + \varepsilon_i$, то

$$\hat f = \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{(k_i f + \varepsilon_i) k_i t_i}{\sigma_i^2}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{k_i^2 t_i}{\sigma_i^2}\right) = f + \tilde\varepsilon,$$

де $\tilde\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\varepsilon_i k_i t_i}{\sigma_i^2}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{k_i^2 t_i}{\sigma_i^2}\right)$.

Таким чином, величину $\tilde\varepsilon$ слід трактувати як похибку в оцінці величини f. Знайдемо дисперсію цієї похибки. Допускаємо, що величини ε_i не корельовані. Тоді

$$E\tilde\varepsilon^2 = \left(\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{k_i t_i}{\sigma_i}\right)^2\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{k_i^2 t_i}{\sigma_i}\right)^2 \qquad (13)$$

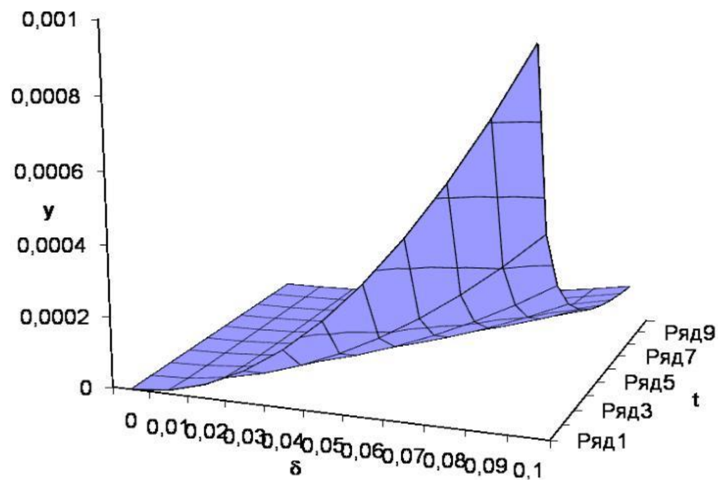

Рисунок 1 – Залежність $E\tilde\varepsilon^2$, яка дозволяє оцінити, скільки часу слід вимірювати кожну координату вектора ς для досягнення необхідних результатів точності (по осі *Z* величина *t* змінюється від 0 до 100 с).

Підберемо моменти вимірювання t_i, $i=1,2,..,M$ так, щоб мінімізувати дисперсію оцінки $\hat f$. Для виконання цієї умови знаменник виразу (13) має бути максимальним, тобто $t_1, t_2, \ldots t_M$ слід визначити з умови максимуму суми $\sum_{i=1}^{M} \frac{k_i^2 t_i}{\sigma_i^2}$, додатково зажадавши, щоб $t_1+t_2+\ldots t_M=T$.

Пронумеруємо виміри МСК у порядку зростання відношень $\frac{\sigma_i^2}{t_i}$. Тоді

$\sum_{i=1}^{M} k_i^2/(\sigma_i^2/t_i) = T(\kappa_1^2/\sigma_1^2)+(t_1-T)(\kappa_1^2/\sigma_1^2)+t_2(\kappa_2^2/\sigma_2^2)+\ldots+t_M(\kappa_M^2/\sigma_M^2) \le$

$\le T(\kappa_1^2/\sigma_1^2)+(t_1-T)(\kappa_1^2/\sigma_1^2)+(T-t_1)(\kappa_2^2/\sigma_2^2) = T(\kappa_1^2/\sigma_1^2)+(T-t_1)[(\kappa_2^2/\sigma_2^2)-(\kappa_1^2/\sigma_1^2)]$.

Але $(T-t_1)[(\kappa_2^2/\sigma_2^2)-(\kappa_1^2/\sigma_1^2)] \le 0$, отже, сума має максимум, коли $t_1=T$, $t_2=t_3=\ldots=t_M=0$, якщо $(\kappa_1^2/\sigma_1^2)>(\kappa_2^2/\sigma_2^2)$.

Це означає, що увесь час T слід витратити на вимірювання МСК, у якого відношення k_i/σ_i найбільше (максимальне). Коли таких МСК декілька, то байдуже, як на них розподіляти час виміру T. Пропонована стратегія забезпечує найменшу похибку у визначенні *f*.

Для прикладу розглянемо, скільки часу необхідно витратити МСК для оцінки спектральної щільності сигналу віброконтролю, одержаного при експериментальному дослідженні на шахті "Ювілейна" ПАТ "ЄВРАЗ СУХА БАЛКА" (термін служби 44 рока, глибина 1510 метрів) за допомогою смугового фільтру з шириною смуги пропускання 1 Гц і з коефіцієнтом варіації 5 %.

Смуговий фільтр має наступні спектральні характеристики $\psi_n(\theta)$: При $n = 0$ $\psi_n(\theta) = 1/\sqrt{\Delta}$, при $|\theta| \le \Delta/2$, $\psi_n(\theta)=0$, при $|\theta - n\Delta| \le \Delta/2$ і при $|\theta + n\Delta| \le \Delta/2$ ($\psi_n(\theta)=0$ при інших значеннях θ.

Визначимо час встановлення фільтру МСК при $n = 0$. Маємо (при $n \ne 0$ аналогічно як $n=0$):

$$K_n(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta\nu}\psi_n(\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi\Delta\sqrt{2}}\int_{n\Delta-\Delta/2}^{n\Delta+\Delta/2}\cos(\theta\nu)\,d\theta=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi\Delta}\cdot\frac{\cos(\nu n\Delta)\sin\left(\frac{\nu\Delta}{2}\right)}{\nu}.$$

Найбільші значення $K_n(\nu)$ виходять при $\nu = 0$ і складає $\frac{\sqrt{2}}{\Delta\pi}$. Відкидаючи ν, при яких $K_n(\nu)$ складає менше 0,01 від свого значення в нулі та замінюючи косинус і синус одиницею, отримаємо умову:

$$\frac{\sqrt{2}}{|\nu|\Delta\pi}\le\frac{0{,}01}{\pi\sqrt{2}}.$$

Таким чином, $|\nu| \ge 200/\Delta = 32$ с. Отже, спостережуваний інтервал потрібно ліворуч і справа скоротити на 32 с. Це ціна хорошої точності встановлення, оскільки нас цікавить похибка $|\chi(t)|^2$, яка буде близькою до $(0{,}01)^2=10^{-4}$. Визначимо

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\theta)|^4\,d\theta=1/\Delta.$$

У зв'язку з чим для коефіцієнта варіації 0,05 маємо умову

$$\frac{\sqrt{4\pi/T}}{\sqrt{\Delta}}=0{,}05.$$

Звідки знаходимо час спостереження вимірювального процесу - $T = 400\times4\,\pi/\Delta = 800$ с. Тому загальний час, який необхідний для вимірювання буде 864 с, що складає приблизно 15 хвилин. Це час, який потрібний МСК, щоб розрізнити значення спектральної щільності з інтервалом в 1Гц і оцінити їх з точністю 10^{-4}.

Висновки Таким чином, якщо вимірювані параметри у гірському або нафтогазовому обладнанні знаходяться в околиці нульової частоти, то відбувається різкий підйом спектральної щільності. Для вивчення таких процесів доводиться розрізняти дуже близькі частоти, що вимагає значного часу спостереження. Запропонована стратегія забезпечує найменшу похибку вимірювання МСК. Знайдена залежність дозволяє оцінити затрати часу на вимірювання кожної координати вектора ς для досягнення заданої точності.

Список використаних джерел

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1979. - 126с.

2. Пытьев, Ю.П. Задание редукции в экспериментальных исследованиях / Ю.П. Пытьев // Математический сборник МГУ. – 1987. - № 34. - С. 19-49.

3. Пытьев, Ю.П. Псевдообратный оператор. Свойства и применение / Ю.П. Пытьев // Математический сборник МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 1992. - Т. 116. - С. 89-104.

4 Эффективное шумоподавление в экспериментах / Ю.П. Пытьев, О.В. Бермот , Г.П. Похил , А.Л. Туринге . - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.– 96с.

5. Химмельблау, Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау. - М.: МГУ. -1990.- 56с. (ДСП).

References

1. Tihonov A. N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnyh zadach M.: Nauka, 1979. 126p.

2. Pytev Yu. P. Zadanie redukcii v eksperimentalnyh issledovaniyah . *Matematicheskij sbornik MGU*. 1987. No 34. P. 19-49.

3. Pytev Yu. P. Psevdoobratnyj operator. Svojstva i primenenie. *Matematicheskij sbornik MGTU im. N.E. Baumana*. 1992. Vol. 116. P. 89-104.

4 Effektivnoe shumopodavlenie v eksperimentah / Yu.P. Pytev, O.V. Bermot , G.P. Pohil, A.L. Turinge . M.: MGTU im. N.E. Baumana, 1994. 96p.

5. Himmelblau, D. Analiz processov statisticheskimi metodami. M.: MGU. 1990. 56p. (DSP).