АВТОМАТИЗАЦІЯ І КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 004.89
DOI 10.31471/1993-9981-2020-2(45)-90-101

КОМП'ЮТЕРНА СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РОБОТОЮ ГАЗОПЕРЕКАЧУВАЛЬНИХ АГРЕГАТІВ ПРИРОДНОГО ГАЗУ

М. І. Горбійчук, О. Т. Лазорів, А. М. Лазорів
Івано-Франківский національний технічний університет нафти і газу,
76019 м.Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, e-mail: gorb@nung.edu.ua

Розроблений метод оптимального керування процесом компримування природного газу компресорною станцією, яка оснащена газоперекачувальними агрегатами з газотурбінним приводом. Розглядається паралельна схема з'єднання газоперекачувальних агрегатів, які працюють на загальний колектор. Як критерій оптимальності вибрана вартість паливного газу з врахуванням потужності викидів оксиду азоту в атмосферу. При цьому враховані обмеження на технологічні параметри і планове завдання на транспортування природного газу. Сформована задача розпадається на дві підзадачі – вибір оптимальної кількості паралельно працюючих агрегатів у кожній із підгруп і визначення оптимального режиму роботи кожного агрегату в групі.

Формалізація задачі оптимального керування роботою ГПА враховує невизначеність, яка притаманна процесу компримування природного газу. З цією метою використаний апарат нечіткої алгебри, що дало змогу врахувати неточності, які виникають як в результаті вимірювання технологічних параметрів, так і в результаті оброблення отриманих даних про технологічний процес. Система оптимального керування інтегрується програмно у верхній рівень (диспетчера) і є складовою частиною загальної системи керування роботою ГПА і має ієрархічну структуру. На нижньому рівні розміщені вимірювальні пристрої технологічних параметрів, які є джерелом інформації для верхнього рівня де відбувається розв'язання оптимізаційних задач. Розроблені методи лягли в основу алгоритмічного і програмного забезпечення комп'ютерної системи оптимального керування роботою окремого агрегату компресорної станції, яка може бути інтегрована в існуючу автоматизовану систему.

Ключові слова: *компресорна станція, газоперекачувальний агрегат, критерій оптимальності, вартість паливного газу, потужність викидів, оксид азоту, оптимальне керування.*

Разработанный метод оптимального управления процессом компримування природного газа компрессорной станцией, которая оснащена газоперекачивающими агрегатами с газотурбинным поводом. Рассматривается параллельная схема соединения газоперекачивающих агрегатов, которые работают на общий коллектор. Как критерий оптимальності выбранная стоимость топ ливного газа с учетом мощности выбросов оксида азота в атмосферу. При этом учтенные ограничения на технологические параметры и плановое задание на транспортировку природного газа. Сформированная задача распадается на две подзадачи – выбор оптимального количества паралельно работающих агрегатов в каждой из подгрупп и определения оптимального режима работы каждого агрегата в группе. Формализация задачи оптимального управления работой ГПА учитывает неопределенность, какая присущая процессу компримування природного газа. С этой целью использованный апарат нечеткой алгебры, что дало возможность учесть неточности, которые возникают как в результате измерения технологических параметров, так и в результате обрабатывания полученных даннях о технологическом процессе. Система оптимального управления интегрируется програмно в верхний урівень (диспетчера) и является составной частью общей системы управления работой ГПА и имеет иерархическую структуру. На нижнем уровне размещены измерительные устройства технологических параметров, которые являються источником информации для верхнего уровня где происходит решение оптимизационных задач.

Разработанные методы легли в основу алгоритмического и програмного обеспечения компьютерной системы оптимального управления работой отельного агрегата компрессорной станции, которая может бать интегрирована в существующую автоматизированную систему.

Ключевые слова: *компрессорная станция, газоперекачивающий агрегат, критерий оптимальности, стоимость топ ливного газа, мощность выбросов, оксид азота, оптимальное управление.*

Method of the optimal control of the natural gas compression process by a compressor station, which is equipped with gas pumping units with a gas turbine drive, has been developed. The parallel scheme of connection of gas pumping units working on the general collector is considered. The cost of fuel gas taking into account the power of nitrogen oxide emissions into the atmosphere is chosen as the criterion of optimality. This takes into account the restrictions on technological parameters and the planned task for the transportation of natural gas. The formed problem is divided into two subtasks - the choice of the optimal number of parallel units in each of the subgroups and determining the optimal mode of operation of each unit in the group. Formalization of optimal control problem of GPA operation takes into account the uncertainty inherent in the process of natural gas compression. For this purpose, the apparatus of fuzzy algebra was used, which made it possible to take into account the inaccuracies that arise both as a result of measuring technological parameters and as a result of processing the obtained data on the technological process. The optimal control system is integrated into the upper level (dispatcher) and is an integral part of the overall control system of the GPA and has a hierarchical structure. At the lower level there are measuring devices of technological parameters, which are a source of information for the upper level where the solution of optimization problems takes place.

The developed methods formed the basis of the algorithmic and software of the computer system for optimal control of a separate unit of the compressor station, which can be integrated into the existing automated system.

Keywords: *compressor station, gas pumping unit, optimality criterion, fuel gas cost, emission capacity, nitric oxide, optimal control.*

.

Вступ

На сучасному етапі експлуатації газотранспортної системи (ГТС) України одними із важливих задач є економія ресурсів, які витрачаються на виробничо-технологічні потреби і зменшення шкідливих викидів у навколишнє середовище.

Цього можна досягти як модернізацією існуючого парка газоперекачувальних агрегатів, так і впровадженням сучасних автоматизованих систем керування процесом транспортування природного газу.

Так, планом модернізації ГТС, розробленого «Укртрансгазом» [1], передбачено реконструкцію чотирьох компресорних станцій: «Яготин», «Диканька», «Ромни» та дотискувальної компресорної станції на підземному сховищі газу «КЦ 4 Більче-Волиця». У реконструкцію компресійних станцій в 2018-2027 роках планують вкласти понад 7 млрд грн.

Інший шлях, менш затратний, це впровадження сучасних автоматизованих систем керування процесом транспортування природного газу, які повинні вирішувати не тільки задачі захисту, контролю та стабілізації технологічних параметрів, але й оптимального керування роботою компресорних станцій.

Таким чином, метою роботи є розроблення методів і алгоритмічного забезпечення комп'ютерної системи компримування природного газу за критерієм, що забезпечує економію паливного газу з врахуванням шкідливих викидів в навколишнє середовище в умовах невизначеності, які виникають в результаті вимірювання технологічних параметрів та неточностей при обробці інформації про технологічний процес.

Аналіз публікацій

На теперішній час особлива увага приділяється ресурсозберігаючим технологіям у газовій промисловості, про що свідчать публікації багатьох авторів.

Так, у роботі [2] розглянута задача зменшення енерговитрат на компримування природного газу за умови, що ступінь підвищення тиску, яку забезпечує компресорна станція є незмінною, а визначається множна значень числа оборотів кожного ротора ГПА при заданому обсязі на транспортування газу.

Оптимальний режим автори визначають за умови, що всі паралельно працюючі агрегати завантажені рівномірно без врахування їх технічних станів.

У роботі [3] з використанням нечітких моделей вирішується задача знаходження такого режиму керування, який забезпечує стабільний тиск на виході компресорної станції. Автори вказують, що для реалізації сформованої задачі необхідно визначити функції належності, які залежать від цілого ряду факторів – ефективність управління, витрата паливного газу, пропускна здатність трубопроводу, відповідні тиски газу на вході і виході нагнітача природного газу. Такі функції належності є багатовимірними функціями і їх визначення на основі експериментальних даних вимагає значних затрат часу і можливе лише при певних допущеннях, які складно перевірити на практиці.

На основі детермінованих моделей, які отримані з використанням зведених характеристик нагнітача, у роботі [4] розв'язується задача перерозподілу потоків природного газу між паралельно працюючими нагнітачами з метою мінімізації витрат паливного газу.

Постановка задачі включає умову забезпечення планового завдання на транспортування газу при заданих тисках га вході і виході нагнітача та при відомій вхідній температурі газу. Забезпечення певної витрати газу через нагнітач здійснюється шляхом зміни обертів вала турбіни низького тиску.

Наведені в роботі газодинамічні характеристики та критерій оптимальності є нелінійними функціями. Тому така задача розв'язана методом нелінійного програмування.

Оскільки використані зведені характеристики і розглядаються залежності, які витікають із політропного процесу, то отримані результати лише в певному наближенні відповідають реальному режимові роботи нагнітача. У роботі не оцінена ступінь наближення отриманих результатів до існуючих режимів роботи ГПА. Крім того не врахований технічний стан конкретного ГПА, який впливає на ефективність роботи кожного ГПА.

Зроблений аналіз літературних джерел показує, що на сьогоднішній день накопичений значний досвід стосовно математичного моделювання і оптимізації режимів роботи компресорних станцій. Але розв'язання таких задач ґрунтується у більшості випадків на використанні детермінованих моделей, що вимагає точного знання їх параметрів і граничних умов [5]. Проте процесу компримування природного газу притаманна невизначеність, яка проявляється в зміні газодинамічних характеристиках потоків та агрегатів; змінюються метрологічні характеристики вимірювальних приладів та відбувається природне зношення вузлів та агрегатів компресорних станцій.

Врахування фактору невизначеності, а також технічного стану як окремих вузлів, так і в цілому ГПА є важливою науковою задачею, яка потребує свого подальшого вирішення.

Структурна схема комп'ютерної системи керування роботою газоперекачувальних агрегатів

Для транспортування газу магістральними трубопроводами використовують газоперекачувальні агрегати (ГПА), які розміщують на компресорних станціях. ГПА мають у своєму складі відцентрові нагнітачі природного газу (ВЦН) з електричним або газотурбінними приводом. АТ «Укртрансгаз» експлуатує 702 агрегати з них 448 з газотурбінним приводом, що складає 63,8 % від загального їхнього числа. Витрати АТ «Укртрансгаз» природного газу для виробничо-технологічних потреб у 2018 році склали 1,9 млрд. куб. м. [1], більша частина якого спалюється в камерах згоряння ГПА з метою забезпечення роботи газотурбінного приводу. Ця доля газу носить назву паливний газ.

Одним із перспективних напрямків зменшення витрат паливного газу є експлуатація ГПА в оптимальному режимі.

Існуючі системи автоматичного керування процесом компромування природного газу виконують дві важливі функції – забезпечують антипомпажний захист ВЦН і підтримують заданий технологічний режим роботи ГПА.

На рис. 1 зображена структурна схема оптимального керування роботою ГПА, яка складається із двох блоків – існуючої системи автоматичного керування ГПА та системи оптимального керування роботою ГПА.

Система автоматичного керування складається із таких блоків (рис.1): комплект давачів, контролери САК ГПА, пристрої реєстрації (ПРІ) та оброблення інформації (ПОІ). Основними функціями САК ГПА є [6]

регулювання обертів ротора ВЦН, антипомпажний і аварійний захист ГПА, керування окремими механізмами ГПА, відображення і реєстрація поточної інформації про стан ГПА.

Регулювання обертів ротора ВЦН здійснюється подачею паливного газу в камеру згоряння ГПА.

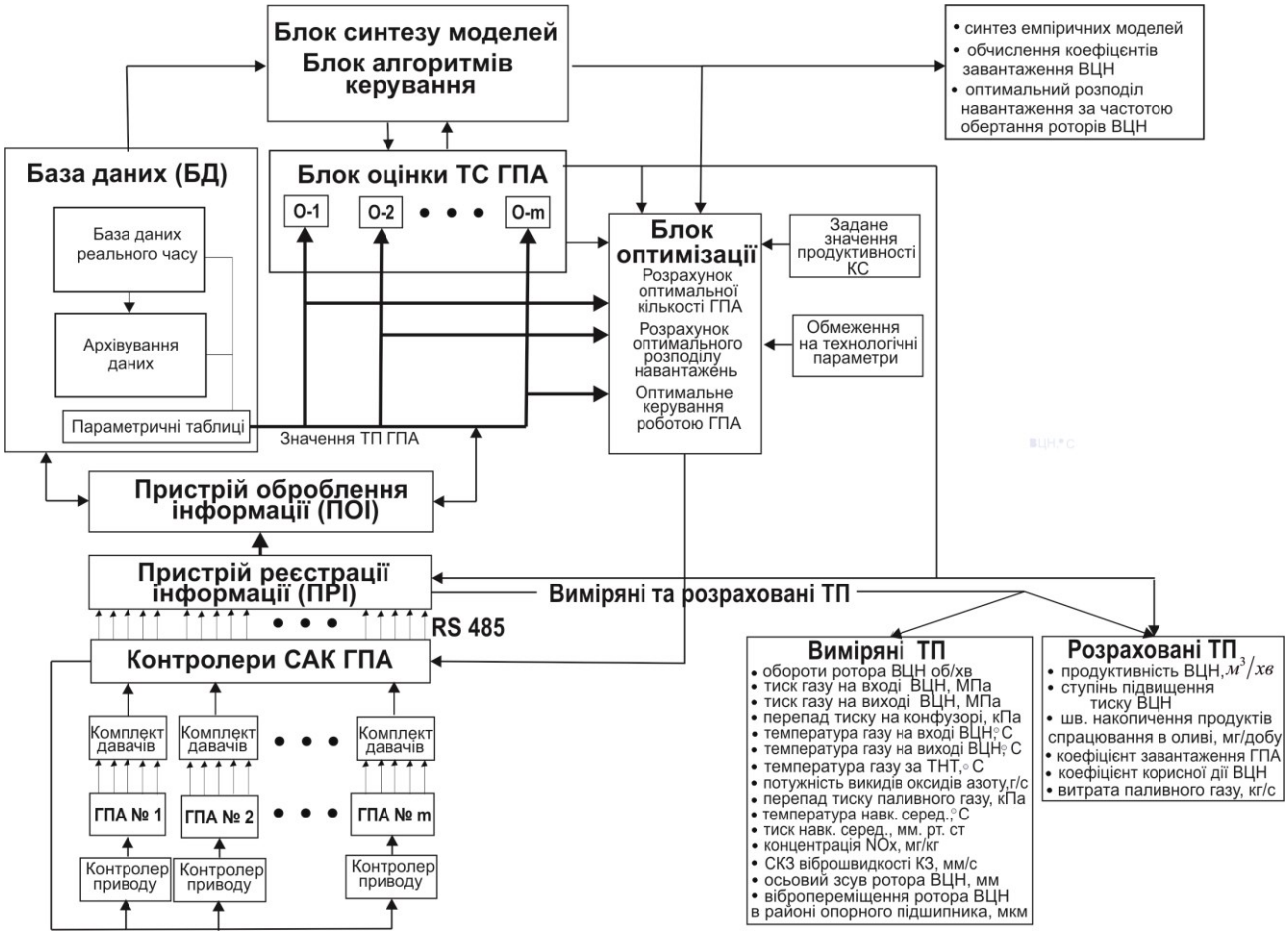

Рисунок 1 – Структурна схема оптимального керування роботою ГПА

За допомогою антипомпажного захисту (регулювання) підтримується мінімально допустимий запас по помпажу, що дає змогу отримати максимальний коефіцієнт корисної дії для даного режиму роботи ГПА.

Аналіз функціонування САК ГПА показує, що такі функції як антипомпажний і аварійний захист ГПА та регулювання частоти обертання ротора ВЦН вимагають високої швидкодії САК. Такт вирішення задачі не повинен бути більшим за 20 мс [6]. Інші функції САК ГПА такої високої швидкодії не вимагають.

У залежності від виробника і поставлених задач програмне забезпечення як контролерів, так і промислових комп'ютерів виконується на різних мовах програмування з використанням цілого ряду програмних продуктів.

Система оптимального керування інтегрується програмно у верхній рівень (диспетчера) і є складовою частиною загальної системи керування роботою ГПА (рис.1) і має ієрархічну структуру.

Інформація із нижнього рівня про поточний стан об'єкта керування (ГПА) використовується цеховою автоматикою для підтримання заданого режиму функціонування ГПА. Ця ж інформація може відображатись на екрані дисплея оператора, а також зберігається в базі

даних (БД), яка має у своєму складі базу даних реального часу і підсистему архівування даних (рис. 1).

Дані, які занесені у БД, структуризовані у вигляді параметричних таблиць. Звідси вони попадають до блоку оцінки технічних станів ГПА.

Оцінюються технічні стани камери згоряння, масляної системи, упорно-опорних, упорних підшипників та проточної частини ВЦН [7]. Для кожного вузла агрегату визначені ознаки, спостереження за якими ведеться на протязі певного проміжку часу. Такі ознаки утворюють множину ознак, яка у теорії розпізнавання образів носить назву множини образів [8]. З використанням нейромережевих технологій множина образів розбивається на класи. Кожному класу присвоюється певний рейтинг r_{ij}, де $i-$номер вузла; $j-$номер ГПА. Тоді рейтинг $j-$ го ГПА обчислюється за такою формулою:

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij},$$

де $n-$кількість вузлів ГПА, для яких оцінюється їхній технічний стан.

За знайденими значеннями R_j визначають оцінку технічного стану ГПА

$$k_j = \frac{R_j}{\sum_{j=1}^{m} R_j}, \quad (1)$$

де $m-$кількість ГПА встановлених на компресорній станції.

Оцінка технічного стану ГПА здійснюється програмно за формулою (1) за допомогою обчислювачів $O-1$, $O-2$, …, $O-m$ (рис. 1) і визначає ступень завантаження нагнітача в оптимізаційній задачі.

У зв'язку із зменшенням обсягів транспортування природного газу магістральними трубопроводами України компресорні станції мають надлишкову потужність. Тому виникає задача оптимального розподілу навантаження між паралельно працюючими ГПА.

Компресорні станції, де встановлені ГПА з газотурбінним приводом, є значними забруднювачами довкілля. Особливо небезпечними є викиди оксидів азоту [9]. Тому критерій оптимальності враховує не тільки вартість паливного газу, але й величину екологічного штрафу на викиди оксиду азоту. Отже, «Блок алгоритмів керування» (рис. 1) розв'язує таку задачу [10, 11]:

$$\min: R(\bar{N}) = c\sum_{i=1}^{L} N_i G_i + c_f \sum_{i=1}^{L} N_i E_{p,i}, \quad (2)$$

де $c-$ вартість спожитого паливного газу, $грн/кг$; N_i - кількість агрегатів в кожній із L груп; G_i - споживання паливного газу $i-$тим ГПА в групі, що складається із N_i нагнітачів, $кг/с$; $E_{p,i}$ - потужність викидів оксидів азоту $i-$тим ГПА, $кг/с$; c_f-величина екологічного податку, $грн/кг$.

Критерій оптимальності (1) повинен мінімізуватись при обмеженні, які визначені завданням на транспортування природного газу для даної КС

$$\sum_{i=1}^{L} q_i k_i N_i = Q_0, \quad (3)$$

де q_i-продуктивність $i-$того нагнітача в групі; k_i-узагальнений коефіцієнт технічного стану $i-$того нагнітача в групі; Q_0-планове завдання компресорній станції на перекачку газу віднесене до одиниці часу. Значення Q_0 визначається блоком (рис. 1) «Задане значення продуктивності КС».

У кожній групі агрегатів є певне число M_i ГПА, що і зумовлює такі обмеження:

$$N_i \le M_i,\ i = \overline{1, L}. \quad (4)$$

Крім того повинні виконуватись такі очевидні обмеження:

$$N_i \ge 0,\ i = \overline{1, L}. \quad (5)$$

Обмеження (3) – (5) формує блок (рис .1) «Обмеження на технологічні параметри».

Величини $E_{p,i}$ і q_i, які фігурують у виразах (2) і (3), є функціями технологічних параметрів. Залежності (2) і (3) мають досить складну функціональну залежність, аналітичні вирази для яких на сьогоднішній день невідомі. Тому для їхнього опису використані емпіричні моделі («Блок синтезу моделей») (рис. 1). Для побудови емпіричних моделей використаний

метод, який ґрунтується на теорії генетичних алгоритмів. У результаті отримують модель оптимальної складності в заданому класі моделей [10]. Як правило, вибирають модель у вигляді полінома певної степені. На ГПА, як об'єкти керування, діють зовнішні впливи, що проявляється в неточності вимірювання технологічних параметрів. Крім того такі технологічні параметри як продуктивність нагнітачів, витрата паливного газу вимірюються опосередковано. Потужності викидів оксидів азоту фіксують з іншим кроком дискретності у порівнянні з іншими технологічними параметрами. Все це дає підстави вважати G_i, а також технологічні параметри, які зумовлюють значення величини $E_{p,i}$ нечіткими величинами. Функція $E_{p,i}$ залежить від таких технологічних параметрів [12] як тиск P_{ac} і температура T_{ac} на виході осьового компресора, температура на вході турбіни високого тиску T_{ht} та витрата паливного газу G.

Залежність $E_{p,i}$ як функція технологічних параметрів синтезована у вигляді полінома

$$E_p\left(\overline{a},\overline{x}\right)=\sum_{i=0}^{M-1}a_i\prod_{j=1}^{m}x_j^{\varphi_{ji}}, \qquad (6)$$

де a_i - коефіцієнти полінома, які мають розмірність потужності викидів оксиду азоту; x_j - величини, які приведені до безрозмірного вигляду за формулою

$$x_j=\frac{X_j-X_{j,\min}}{X_{j,\max}-X_{j,\min}} \qquad (7)$$

x_j - технологічні параметри у безрозмірній формі, що зумовлюють значення величини $E_{p,i}$; X_j-j-тий технологічний параметр в розмірних одиницях; $X_1=P_{ac}$, $X_2=T_{ac}$, $X_3=T_{ht}$, $X_4=G$; $\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ji}\le n_\varphi$; $m-$кількість аргументів функціональної залежності (6) ($m=4$).

Степені полінома φ_{ji}, $j=\overline{0,M-1}$, $i=\overline{1,m}$ утворюють матрицю Ф розміром $M\times n$ з сумою рядків, що не перевершує n_φ.

Кількість членів полінома (6) можна визначити за такою формулою: $M=\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Зроблено допущення [10], що нечіткі величини x_j, які є аргументами функціональної залежності $E_{p,i}$, мають трикутні функції належності $\mu\left(x_k\right)$.

де

Після переходу до безрозмірних за формулою (7) величин критерій оптимальності (2) набуде такого вигляду:

$$\min: R\left(\overline{N}\right)=\sum_{i=1}^{L}\left(cN_i\pi_{G,i}x_{G,i}+c_fN_iE_{p,i}\right)+c\sum_{i=1}^{L}N_iG_{i,min}, \qquad (8)$$

де $\pi_{G,i}=G_{i,max}-G_{i,min}$; $x_{G,i}-$обчислюється за формулою (7) при $X_4=G$.

Функція належності $\mu\left(x_j\right)$ це рівнобедрений трикутник, висота якого дорівнює одиниці, а основа має ширину Δ_j. Оскільки функція належності $\mu\left(x_j\right)$ описується кусково-неперервними функціями, то вона є незручною для практичного використання. Тому в роботі [13] залежність $\mu\left(x_k\right)$ запропоновано апроксимувати гаусовою функцією належності. Якщо взяти $\mu\left(x_j\right)=\frac{1}{2}$, де $x_j=x_{j,\min}+\frac{\Delta_j}{2}$, $x_{j,\min}$ - мінімальне значення $k-$го технологічного параметру, то в результаті апроксимації отримаємо таку гаусову функцію:

$$\hat{\mu}\left(x_j\right)=\exp\left(-\frac{\left(x_j-x_j^{(0)}\right)^2}{2\sigma_j^2}\right), \qquad (9)$$

де $\mu\left(x_j^{(0)}\right)=1$; $x_j^{(0)}-$модальне значення нечіткої величини x_j; $\sigma_j^2=k_\sigma\Delta_j^2$; σ_j-коефіцієнт розмитості нечіткої величини x_j; $k_\sigma=\frac{1}{32\ln 2}$.

Критерій оптимальності (8) подамо як суму двох величин R_1 і $c\sum_{i=1}^{L}N_iG_{i,min}$, де

$$R_1 = \sum_{i=1}^{L}\left(cN_i\pi_{G,i}x_{G,i} + c_f N_i E_{p,i}\right). \quad (10)$$

Оскільки перший доданок у виразі (10) є адитивною функцією величин $x_{G,i}$, $E_{p,i}$, і які мають гаусову функцію належності [10], то R_1 також матиме гаусову функцію належності [14]

$$\mu\left(R_1\right) = \exp\left(-\frac{\left(R_1 - R_{1,0}\right)^2}{2\sigma_R^2}\right). \quad (11)$$

Виходячи з того, що технологічні параметри x_j, $j = 1,\ldots$ є нечіткими величинами з функцією належності (9), у роботі [10] доказано, що

$$R_{1,0} = \sum_{i=1}^{L}\left(cN_i\pi_{G,i}x_{G,i}^{(0)} + c_f N_i m_{E,i}\right), \quad (12)$$

$$m_{E,i} = \sum_{j=0}^{M-1} a_j \prod_{k=1}^{m}\left(x_{0,k}^{(i)}\right)^{\varphi_{jk}}, \quad (13)$$

де $x_{0,k}^{(i)}$ - модальні значення технологічних параметрів, які подані у безрозмірній формі.

$$\sigma_R^2 = k\sum_{i=1}^{L}\left(\left(cN_i\pi_{G,i}\right)^2\Delta_{G,i}^2 + \left(c_f N_i\right)^2\Lambda_i\right), \quad (14)$$

де $x_{G,i}^{(0)}$ - модальне значення нечіткої величини $x_{G,i}$;

$$\Lambda_i = \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2\left(\sum_{r=1}^{m}\Delta_{r,i}^2\varphi_{jr}\left(x_{0,r}^{(i)}\right)^{\varphi_{jr}-1}\prod_{\substack{q=1,\\ q\neq i}}^{m}\left(x_{0,q}^{(i)}\right)^{\varphi_{jq}}\right).$$

Нехай заданий γ - зріз нечіткої множини, що визначається функцією належності (11). Тоді

$$\mu\left(R_1\right) = \gamma.$$

З врахуванням (11) і співвідношень (12) – (14) будемо мати

$$\min: R\left(\bar{N}\right) = c\sum_{i=1}^{L} N_i\left(\pi_{m,i}x_{0,i}^{(m)} + \frac{c_f}{c}\sum_{j=0}^{M-1} a_j\prod_{k=1}^{m}\left(x_{0,k}^{(i)}\right)^{\varphi_{jk}} + G_{i,min}\right) + \sigma_{R_1}\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma^2}}. \quad (15)$$

«Блок оптимізації» (рис. 1) за критерієм (15) з врахуванням обмежень (3) – (5) розраховує оптимальну кількість агрегатів, яка забезпечує заданий обсяг Q_0 транспортування газу компресорною станцією.

Задача оптимізації (15) з обмеженнями (3) – (5) є задачею дискретного нелінійного програмування і її розв'язок можна знайти за допомогою методу меж і гілок [15].

Після того як визначена оптимальна кількість агрегатів, постає задача визначення оптимального режиму роботи кожного ГПА. Ця задача розв'язується «Блоком оптимальності» (рис. 1).

Ставиться задача – для кожної групи агрегатів, кількість яких визначена за критерієм оптимальності (15) з врахуванням обмежень (3) – (5), визначити таке число обертів n_i, $i = \overline{1,m}$, щоб затрати на експлуатацію кожного газоперекачувального агрегату були б мінімальними.

Отже, «Блок оптимізації» (рис.1) мінімізує таку величину:

$$R\left(\bar{n}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(cG_i\left(n_i\right) + c_f E_{p,i}\left(n_i\right)\right). \quad (16)$$

При цьому повинні виконуватися такі обмеження на технологічні параметри [13]:

$$T_{out}^{(i)} \le T_{out,max}^{(i)}, \quad (17)$$

$$T_{tur}^{(i)} \le T_{tur,max}^{(i)}, \quad i = \overline{1,m}, \quad (18)$$

де $T_{out}^{(i)}$ - температура газу на виході із нагнітача; $T_{tur}^{(i)}$ - температура продуктів згоряння на виході $i-$ тої турбіни низького тиску.

Для запобігання явищ помпажу і перевантаження нагнітача обмежують нижнє $n_{i,min}$ та верхнє $n_{i,max}$ значення частот обертання ротора ВЦН

$$n_{i,min} \le n_i \le n_{i,max}. \quad (19)$$

Встановлено [16], що витрата паливного газу G_i, потужність викидів $E_{p,i}$ оксидів азоту, температура газу $T_{out}^{(i)}$ на виході із нагнітача та температура продуктів згоряння $T_{tur}^{(i)}$ на виході $i-$ тої турбіни низького тиску є функціями режимних параметрів

$$G_i = f_G^{(i)}\left(n_i, P_{in}, T_{in}, \varepsilon, P_c, T_c\right), \quad (20)$$

$$E_{p,i} = f_{E,i}\left(n_i, P_{ac,i}, T_{ac,i}, T_{ht,i}\right), \tag{21}$$

$$T_{out}^{(i)} = f_{out}^{(i)}\left(n_i, P_{in}, T_{in}, \varepsilon, P_c, T_c\right), \tag{22}$$

$$T_{tur}^{(i)} = f_{tur}^{(i)}\left(n_i, P_{in}, \varepsilon, P_c, T_c\right). \tag{23}$$

У виразах (20) – (23) прийняті такі позначення: P_{in}, T_{in} - тиск і температура газу на вході відцентрового нагнітача; P_c, T_c - тиск і температура навколишнього середовища; $P_{ac,i}$, $T_{ac,i}$ - тиск і температура газу на виході $i-$го осьового компресора; $T_{ht,i}$ - температура на виході турбіни високого тиску.

Ступінь підвищення тиску ε визначають за такою формулою [17]: $\varepsilon = \dfrac{P_{a,out}}{P_{a,in}}$, де $P_{a,in}$, $P_{a,out}$ - абсолютні тиски на вході і виході нагнітача.

Оскільки відцентрові $T_{out}^{(i)}$ нагнітачі працюють паралельно на загальний колектор, то тиск P_{in} і температура T_{in} на вході в нагнітач, тиск P_{out} на виході із нагнітача, тиск P_c і температура T_c навколишнього середовища для групи нагнітачів приймаються однаковими.

Функціональні залежності (20) – (23) «Блоком синтезу моделей» (рис. 1) апроксимуються поліноміальною залежністю, яка подібна до (6). З цією метою використаний метод, який ґрунтується на ідеях генетичних алгоритмів [17].

Для визначеного режиму n_i роботи відцентрового нагнітача технологічні параметри P_{in}, T_{in}, P_c, T_c та ε, які є аргументами функціональних залежностей (22) і (23) приймуть конкретні значення. Тоді залежності (22) і (23) будуть функціями лише однієї змінної

$$T_{out}^{(i)} = \theta_{out}^{(i)}\left(n_i\right), \tag{24}$$

$$T_{tur}^{(i)} = \theta_{tur}^{(i)}\left(n_i\right). \tag{25}$$

Для значень $T_{out,max}^{(i)}$ і $T_{tur,max}^{(i)}$, які визначені обмеженнями (16) і (17), співвідношення (24) і (25) будуть такими:

$$T_{out,max}^{(i)} = \theta_{out}^{(i)}\left(n_i\right),$$
$$T_{tur,max}^{(i)} = \theta_{tur}^{(i)}\left(n_i\right),\ i = \overline{1,\ m}.$$

Розв'язування отриманих рівнянь відносно n_i дає такі значення: $n_{out,max}^{(i)}$ і $n_{tur,max}^{(i)}$. Тоді верхня межа для числа оборотів ротора нагнітача в обмеженні (19) визначиться такою умовою:

$$\tilde{\ }_{\ldots} \quad \imath : \left\{n_{out,max}^{(i)},\ n_{tur,max}^{(i)},\ n_{i,max}\right\},$$
$$i = \overline{1,\ m}. \tag{26}$$

Отже, «Блок обмеження на технологічні параметри» (рис. 1) видозмінює умову (19). У результаті отримаємо

$$n_{i,min} \le n_i \le \tilde{\ }_{\ldots},\ i = \overline{1,\ m} \tag{27}$$

Виконання умови (27) є гарантією того, що будуть виконані обмеження (17) і (18).

«Блоком обмеження на технологічні параметри» (рис. 1) формується додаткова умова, яка обумовлює забезпечення заданого балансу перекачування природного газу

$$\sum_{i=1}^{m} k_i q_i\left(n_i\right) = q_0, \tag{28}$$

де $q_0 = \dfrac{Q_0}{m}$ – середня продуктивність ВЦН, яка зумовлена завданням Q_0 на перекачування газу.

Коефіцієнт k_i завантаження $i-$го нагнітача в групі паралельно працюючих m нагнітачів визначає «Блок оцінки ТС ГПА» (рис.1) за формулою, яка подібна до (1).

Продуктивність q_i $i-$го нагнітача є функцією технологічних параметрів [16] таких як P_{in}, T_{in}, ε, P_c, і T_c, які для визначеного режиму роботи ГПА приймають певні конкретні значення. Тому в обмеженні (28) $q_i = q_i\left(n_i\right)$.

Із-за цілого ряду причин коефіцієнти поліноміальних моделей типу (6) «Блоком синтезу моделей» (рис. 1) обчислюються з певною неточністю. До таких причин слід віднести - похибки методів опосередкованого вимірювання витрат паливного газу та продуктивності нагнітачів за перепадом тисків, похибки інтерполяції при визначенні

атмосферного тиску і потужності викидів оксидів азоту. Необхідність інтерполяції зумовлена різнотемповими кроками дискретності P_{in}, T_{in}, T_{out} і T_c, з одної сторони, та атмосферного тиску P_c і потужності викидів E_p, з іншої сторони. Наприклад, вимірювання продуктивності нагнітачів за перепадом тисків на конфузорі може спричинити похибки вимірювань до 20 % [18]. Крім того процес компримування природного газу знаходиться під дією різноманітних зовнішніх впливів, що спотворює результати вимірювань технологічних параметрів. Все це дає підстави вважати коефіцієнти емпіричних моделей нечіткими величинами.

Результати спостережень за потужностями викидів оксидів азоту в навколишнє середовище і функціональна залежність $q_i = f_{q,i}\left(n_i, P_{in}, T_{in}, \varepsilon, P_c, T_c\right)$, $i = \overline{1,m}$ апроксимуються поліномами подібних до (6)

$$E_{p,j}\left(\overline{a}_E^{(j)}, \overline{x}_E\right) = \sum_{i=0}^{M-1} a_{E,i}^{(j)} \prod_{k=1}^{r_1} x_{E,k}^{\varphi_{ki}}, \qquad (29)$$

$$q_j\left(\overline{a}_q, \overline{x}_q\right) = \sum_{i=0}^{M-1} a_{q,i}^{(j)} \prod_{k=1}^{r_2} x_{q,k}^{\varphi_{ki}}, \ j = \overline{1,m}, \qquad (30)$$

де $\overline{x}_E$ і $\overline{x}_q$ – вектори технологічних параметрів, компоненти яких проведені до безрозмірних одинець за формулою (7); для емпіричної моделі (29): $X_1 = n_j$, $X_2 = P_{ac,j}$, $X_3 = T_{ac,j}$ і $X_4 = T_{ht,j}$; для емпіричної моделі (30): $X_1 = n_j$, $X_2 = P_{in}$, $X_3 = T_{in}$, $X_4 = \varepsilon$, $X_5 = P_c$ і $X_6 = T_c$; r_1 і r_2 – розмірності векторів $\overline{x}_E$ і $\overline{x}_q$.

Синтез емпіричних моделей (29) і (30) здійснюється «Блоком синтезу моделей» (рис. 1) за допомогою методу [17], який ґрунтується на теорії генетичних алгоритмів. У результаті отримують емпіричну модель оптимальної складності, в якій число коефіцієнтів моделі відмінних від нуля менше M. Інші коефіцієнти емпіричних моделей приймають нульові значення.

Кожний режим роботи i – того нагнітача характеризується визначеним набором технологічних параметрів. Значення кожного із цих технологічних параметрів, крім частоти обертання ротора нагнітача, які приведені до безрозмірних одиниць, підставимо у вирази синтезованих емпіричних моделей (29) і (30). У результаті отримаємо поліноми

$$\tilde{L}_{p,j}\left(x_1^{(j)}, \ldots, x_{r_1}^{(j)}\right) = \sum_{k=0}^{n_{E,j}} A_{E,k}^{(j)} x_1^k, \qquad (31)$$

$$\tilde{\ldots}_{j}\left(\ldots\right) = \sum_{k=0}^{n_{q,j}} A_{q,k}^{(j)} x_1^k, \ j = \overline{1,m}, \qquad (32)$$

де $n_{E,j} \le r_1$ і $n_{q,j} \le r_2$.

Допускається, що коефіцієнти поліномів моделей (31) і (32) є нечіткими величинами з трикутною функцією належності, яка апроксимована гаусовою функцією подібної до (9). Для коефіцієнтів полінома (31) і (32)

$$\mu\left(A_{E,k}^{(j)}\right) = \exp\left(-\frac{\left(A_{E,k}^{(j)} - A_{E_0,k}^{(j)}\right)^2}{2\left(\sigma_{E,k}^{(j)}\right)^2}\right), \qquad (33)$$

$$\mu\left(A_{q,k}^{(j)}\right) = \exp\left(-\frac{\left(A_{q,k}^{(j)} - A_{q_0,k}^{(j)}\right)^2}{2\left(\sigma_{q,k}^{(j)}\right)^2}\right), \ j = \overline{1,m}, \qquad (34)$$

де $A_{E_0,k}^{(j)}$, $A_{q_0,k}^{(j)}$ – модальні значення функцій належності (33) і (34).

Оскільки трикутні функції належності нечітких величин $A_{E,k}^{(j)}$ і $A_{q,k}^{(j)}$ апроксимовані гаусовою функцією, то $\left(\sigma_{E,k}^{(j)}\right)^2 = k_\sigma\left(\Delta_{E,k}^{(j)}\right)^2$ і $\left(\sigma_{q,k}^{(j)}\right)^2 = k_\sigma\left(\Delta_{q,k}^{(j)}\right)^2$.

Величину інтервалів невизначеності $\Delta_{E,k}^{(j)}$ і $\Delta_{q,k}^{(j)}$ нечітких величин $A_{E,k}^{(j)}$ і $A_{q,k}^{(j)}$ визначимо у такий спосіб: $\Delta_{E,k}^{(j)} = \delta_{E,k}^{(j)} A_{E_0,k}^{(j)}$ і $\Delta_{q,k}^{(j)} = \delta_{q,k}^{(j)} A_{q_0,k}^{(j)}$, де $\left\{\delta_{E,k}^{(j)}, \delta_{q,k}^{(j)}\right\} \in (0;1]$.

Витрата паливного газу вимірюється з похибкою, що не перевищує 2 % [19]. Тому апроксимація залежності (20) поліномом

$$G_j\left(\overline{a}_G, \overline{x}_G\right) = \sum_{i=0}^{M-1} a_{G,i}^{(j)} \prod_{k=1}^{r_2} x_{G,k}^{\varphi_{ki}}, \ j = \overline{1,m}, \qquad (35)$$

допускає, що коефіцієнти $a_{G,i}^{(j)}$ полінома (35) – чіткі числа.

На основі зроблених допущень «Блок алгоритмів керування» (рис.1) формує задачу оптимального керування групою паралельно включених ГПА з метою визначення таких оборотів ротора кожного нагнітача, щоб критерій оптимальності

$$R\left(\overline{x}^{(1)}\right)=c\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n_{G,j}}A_{G,k}^{(j)}x_{1,j}^{\ k}+r_c\sum_{k=0}^{n_{E,j}}A_{E_0,k}^{(j)}x_{1,j}^{k}+K_E\left(\sum_{k=0}^{n_{E,j}}\left(\delta_{E,\ k}^{(j)}A_{E_0,k}^{(j)}\right)^2x_{1,j}^{2k}\right)^{1/2}\right) \tag{36}$$

набув мінімального значення при таких обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{m}k_j\left(\sum_{k=0}^{n_{q,j}}A_{q_0,k}^{(j)}x_{1,j}^{\ k}+K_q\left(\sum_{k=0}^{n_{q,j}}\left(\delta_{q,\ k}^{(j)}A_{q_0,k}^{(j)}\right)^2x_{1,j}^{2k}\right)^{1/2}\right)=q_0 \tag{37}$$

,

$$0\le x_{1,j}\le\beta_j,\ j=\overline{1,m}, \tag{38}$$

де $x_{1,j}$ – число оборотів ротора j – нагнітача в безрозмірних одиницях; $K_q=k_\sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\gamma^2}}$; $0<\delta_{q,\ k}^{(j)}\le 1$; $A_{q_0,k}^{(j)}$ – модальні значення коефіцієнтів полінома;; $\beta_j=\frac{\tilde{i}_{j,max}-n_{j,min}}{\Delta_n^{(j)}}$, $j=\overline{1,m}$; $\Delta_n^{(j)}=n_{j,max}-n_{j,min}$.

Сформована задача (36) – (38) оптимального керування роботою паралельно працюючих ГПА розв'язується «Блоком оптимізації». Це задача нелінійного програмування і для знаходження її розв'язку можна застосувати, наприклад, алгоритм внутрішніх точок [20] реалізований у програмному продукті MatLab (вбудована функція fmincon).

Результатом реалізації алгоритму розв'язування задачі (36) – (38) є оптимальні значення числа оборотів ротора нагнітача у безрозмірних одиницях. Перехід до розмірних одиниць здійснюється за формулою

$$n_j=\Delta_{n,j}x_{1,j}+n_{j,min},\ j=\overline{1,m}.$$

Отримані значення n_j засилаються до субблоку «Оптимальне керування роботою ГПА» («Блок оптимізації») (рис.1). Звідси вони поступають до «Контролерів ГПА», де реалізуються як вставки регуляторів, які за допомогою контролера приводу змінюють подачу паливного газу в камери згоряння «ГПА № 1», «ГПА № 2», …, «ГПА № m» (рис. 1).

Висновки

Запропонована система оптимального керування роботою ГПА вирішує дві задачі – оптимальний розподіл планової кількості природного газу між паралельно працюючими агрегатами та визначення оптимального числа оборотів ротора нагнітача. Як критерій оптимальності вибраний вартість паливного газу з врахуванням потужності викидів оксиду азоту в навколишнє середовище, що є основною відмінності роботи від робіт, де розглядались подібні задачі.

Особливістю роботи є і те, що при формалізації задач оптимального керування роботою ГПА врахована невизначеність, яка притаманна процесу компримування природного газу. З цією метою використаний апарат нечіткої алгебри, що дало змогу врахувати неточності, які виникають як в результаті вимірювання технологічних параметрів, так і в результаті оброблення отриманих даних про технологічний процес.

Література

1. Офіційний сайт АТ «Укртрансгазу». Режим доступу: http://utg.ua/utg/about-company/utg-today.html

2. Тухбатуллин Ф. Г., Короленок А. М., Колотилов Ю. В. Реализация эффективной работы компрессорной станции с соблюдением принципов промышленной безопасности техногенных объектов // Территория «Нефтегаз». 2015. № 6. С.110 – 112.

3. Альхайек Р., Удовенко С. Г., Шамраев А. А. Оптимизация режимов автоматического управления компрессорными станциями магистральных газопроводов // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. 2011. С.29 – 35.

4. Лещенко І. Ч. Постановка задачі оптимізації режимів роботи цехів компресорних станцій магістральних газопроводів // Проблеми загальної енергетики. 2006. №13. С. 67 – 70.

5. Об одной стратегии оптимизации режимов работы газотранспортных систем. А. Д. Тевяшев, О. А. Тевяшева, В. С. Смирнова, В.

А. Фролов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2010. №15 с. 94-98.

6. Кривоносов А., Харитонов А., Гуличев В. Система управления газоперекачивающими агрегатами // СТА. 2/97. С. 66-68.

7. Горбійчук М. І., Лазорів А. М., Луцюк І. І. Алгоритми оптимального керування процесом компримування природного газу // Нафтогазова енергетика. Всеукраїнський науково-технічний журнал. 2011. № 2(15). С. 48–56.

8. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов; пер. с англ. М.: 1978. 411 с.

9. Мірзоєва О. Ю. Аналіз існуючих методів моделей технічних засобів контролю викидів шкідливих речовин з камери згорання // Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. Випуск 3/2017 (104). Частина 1. С. 100 – 105.

10. Горбійчук М. І., Біла О. Т. Оптимальний розподіл паралельно працюючих агрегатів з врахуванням екологічних податків в умовах невизначеності // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. 2019. № 1 (46). С. 35 – 45.

11. Алгоритмічне та програмне забезпечення комп'ютерної системи вибору оптимальної кількості паралельно працюючих нагнітачів природного газу / М.І.Горбійчук, О. Т. Біла, Б. В. Пашковський, Н. Т. Лазорів // Методи та прилади контролю якості. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2019. №1(42). С. 47-56.

12. Митрофанов В. А. Закономерности образования вредных веществ и повешение экологичности ГТД: автореф. дисс. канд. техн. наук. СПб 2000. 18 с.

13. Gorbiychuk M., Pashkovskiy B., Moyseenko O., Sabat N. Solution of the optimization problem of the control over operation of gas pumping units under fuzzy conditions // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Information technology. Industry control system. 2017. Vol. 5, No 2(89). Pp. 65 – 71.

14. Раскин Л. Г., Серая О. В. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения; монография. Харьков: Парус, 2008. 352 с.

15. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

16. Gorbiychuk M. I., Bila O. T., Slabinoha M. O., Humeniuk T. V. Optimization Natural Gas Pumping Units Operation by the Economic Criterion in the Conditions of Uncertainty // 7th International Conference on Modeling, Development and Strategic Management of Economic System (MDSMES 2019). P. 47 – 52.

17. Gorbiychuk Mikhail I., Medvedchuk Vera M., Lazoriv Alla N. Analysis of Parallel Algorithm of Empirical Models Synthesis on Principles of Genetic Algorithms Journal of Automation and Information Sciences. – vol. 48, is. 2. – P. 54 -73.

18. Ільченко Б. С. Діагностування функціонально-технічного стану газоперекачувальних арегатів: монографія. Х.: Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. ХНАМГ, 2011. – 228 с.

19. Компресорні станції. Контроль теплотехнічних та екологічних характеристик газоперекачувальних агрегатів: СОУ 60.3-30019801-011:2004. [Чинний від. 22.12.2004]. К.: ДК Укртрансгаз. 117 с.

20. Byrd, R.H., Gilbert J. C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming // Mathematical Programming. Vol 89, No. 1. Pp. 149–185. 2000.

References

1. Oficijny`j sajt AT «Ukrtransgazu». Rezhy`m dostupu: http://utg.ua/utg/about-company/utg-today.html

2. Tuxbatully`n F. G., Korolenok A. M., Koloty`lov Yu. V. Realy`zacy`ya эffekty`vnoj raboty kompressornoj stancy`y` s soblyudeny`em pry`ncy`pov promыshlennoj bezopasnosty` texnogennыx obъektov // Terry`tory`ya «Neftegaz». 2015. # 6. S.110 – 112.

3. Al`xajek R., Udovenko S. G., Shamraev A. A. Opty`my`zacy`ya rezhy`mov avtomaty`cheskogo upravleny`ya kompressornыmy` stancy`yamy` magy`stral`nыx gazoprovodov // Avtomaty`zy`rovannыe sy`stemы upravleny`ya y` pry`boгы avtomaty`ky`. 2011. S.29 – 35.

4. Leshhenko I. Ch. Postanovka zadachi opty`mizaciyi rezhy`miv roboty` cexiv kompresorny`x stancij magistral`ny`x gazoprovodiv // Problemy` zagal`noyi energety`ky`. 2006. #13. S. 67 – 70.

5. Ob odnoj strategy`y` opty`my`zacy`y` rezhy`mov raboty gazotransportnыx sy`stem. A. D.

Tevyashev, O. A. Tevyasheva, V. S. Smy`rnova, V. A. Frolov // Vostochno-Evropejsky`j zhurnal peredovыx texnology`j. 2010. #15 s. 94-98.

6. Kry`vonosov A., Xary`tonov A., Guly`chev V. Sy`stema upravleny`ya gazoperekachy`vayushhy`my` agregatamy` // STA. 2/97. S. 66-68.

7. Gorbijchuk M. I., Lazoriv A. M., Lucyuk I. I. Algory`tmy` opty`mal`nogo keruvannya procesom kompry`muvannya pry`rodnogo gazu // Naftogazova enogrgety`ka. Vseukrayins`ky`j naukovo-texnichny`j zhurnal. 2011. # 2(15). S. 48–56.

8. Tu Dzh., Gonsales R. Pry`ncy`pы raspoznavany`ya obrazov; per. s angl. M.: 1978. 411 s.

9. Mirzoyeva O. Yu. Analiz isnuyuchy`x metodiv modelej texnichny`x zasobiv kontrolyu vy`ky`div shkidly`vy`x rechovy`n z kamery` zgorannya // Visny`k KrNU imeni My`xajla Ostrograds`kogo. Vy`pusk 3/2017 (104). Chasty`na 1. S. 100 – 105.

10. Gorbijchuk M. I., Bila O. T. Opty`mal`ny`j rozpodil paralel`no pracyuyuchy`x agregativ z vraxuvannyam ekologichny`x podatkiv v umovax nevy`znachenosti // Naukovy`j visny`k Ivano-Frankivs`kogo nacional`nogo texnichnogo universy`tetu nafty` i gazu. 2019. # 1 (46). S. 35 – 45.

11. Algory`tmichne ta programne zabezpechennya komp'yuternoyi sy`stemy` vy`boru opty`mal`noyi kil`kosti paralel`no pracyuyuchy`x nagnitachiv pry`rodnogo gazu / M.I.Gorbijchuk, O. T. Bila, B. V. Pashkovs`ky`j, N. T. Lazoriv // Metody` ta pry`lady` kontrolyu yakosti. Ivano-Frankivs`k: IFNTUNG, 2019. #1(42). S. 47-56.

12. My`trofanov V. A. Zakonomernosty` obrazovany`ya vrednыx veshhestv y` povesheny`e эkology`chnosty` GTD: avtoref. dy`ss. kand. texn. nauk. SPb 2000. 18 s.

13. Gorbiychuk M., Pashkovskiy B., Moyseenko O., Sabat N. Solution of the optimization problem of the control over operation of gas pumping units under fuzzy conditions // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Information technology. Industry control system. 2017. Vol. 5, No 2(89). Rr. 65 – 71.

14. Rasky`n L. G., Seraya O. V. Nechetkaya matematy`ka. Osnovы teory`y`. Pry`lozheny`ya; monografy`ya. Xar`kov: Parus, 2008. 352 s.

15. Sy`gal Y`. X., Y`vanova A. P. Vvedeny`e v pry`kladnoe dy`skretnoe programmy`rovany`e: modely` y` vыchy`sly`tel`nыe algory`tmы. M.: Fy`zmatly`t, 2002. 240 s.

16. Gorbiychuk M. I., Bila O. T., Slabinoha M. O., Humeniuk T. V. Optimization Natural Gas Pumping Units Operation by the Economic Criterion in the Conditions of Uncertainty // 7th International Conference on Modeling, Development and Strategic Management of Economic System (MDSMES 2019). R. 47 – 52.

17. Gorbiychuk Mikhail I., Medvedchuk Vera M., Lazoriv Alla N. Analysis of Parallel Algorithm of Empirical Models Synthesis on Principles of Genetic Algorithms Journal of Automation and Information Sciences. – vol. 48, is. 2. – P. 54 -73.

18. Il`chenko B. S. Diagnostuvannya funkcional`no-texnichnogo stanu gazo-perekachuval`ny`x aregativ: monografiya. X.: Xark. nacz. akad. mis`k. gosp-va. XNAMG, 2011. – 228 s.

19. Kompresorni stanciyi. Kontrol` teplotexnichny`x ta ekologichny`x xaraktery`sty`k gazoperekachuval`ny`x agregativ: SOU 60.3-30019801-011:2004. [Chy`nny`j vid. 22.12.2004]. K.: DK Ukrtransgaz. 117 s.

20. Byrd, R.H., Gilbert J. C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming // Mathematical Programming. Vol 89, No. 1. Rp. 149–185. 2000.