

УДК 681.5

DOI 10.31471/1993-9981-2020-2(45)-66-81

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ФІЛЬТРАЦІЇ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБ'ЄКТІВ

М. І. Горбійчук, М. І. Козуляк, В. С. Борин

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-67, e-mail: kafatp@ukr.net

Умовою успішного застосування на локальному рівні управління промислових регуляторів та програмованих логічних контролерів є наявність інтегрованих програмних засобів автоматичного тюнінгу параметрів алгоритму регулювання. Динамічні властивості об'єкта найчастіше визначають за результатами активного експерименту безпосередньо на об'єкті через процедуру ідентифікації, що ґрунтується на попередньо оброблених даних.

Проаналізовані основні технології фільтрації часових рядів та підібрана система показників для їх порівняння. Сплановані і проведені серії імітаційних експериментів по отриманню розгінних характеристик з різними ступенями накладання адитивних перешкод по входу та виходу. Досліджено прості інженерні алгоритми експоненціального, медіанного, ковзного середнього простого і зваженого та інших віконних фільтрів на предмет ефективності згладжування в режимі off-line і on-line обробки отриманих даних за показниками відносного середнього квадратичного та інтегрального середнього відхилення від базової лінії і проведено оцінку обчислювальної складності методів.

За результатами проведених досліджень сформульовано висновки про реальну ефективність застосування on-line фільтрації, наведено рекомендації стосовно їх практичного використання на апаратних платформах локальних засобів регулювання і доведено низький рівень згладжування off-line методів на обмеженій експериментальній вибірці. Встановлено напрямки подальших досліджень у напрямку застосування складніших алгоритмів фільтрації для сигналів з високим рівнем завад.

Ключові слова: розгінна характеристика контролер, вікно згладжування, імітаційний експеримент, цифровий фільтр.

Условием успешного применения на локальном уровне промышленных регуляторов и программируемых логических контроллеров является наличие интегрированных программных средств автоматического тюнинга параметров алгоритма регулирования. Динамические свойства объекта зачастую определяют по результатам активного эксперимента непосредственно на объекте через процедуру идентификации, основанной на предварительно обработанных данных.

Проанализированы основные технологии фильтрации временных рядов и подобрана система показателей для их сравнения. Спланированы и проведены серии имитационных экспериментов по получению разгонных характеристик с различными степенями наложения аддитивных помех по входу и выходу. Исследованы простые инженерные методы экспоненциального, медианного, скользящего среднего простого и взвешенного и других оконных фильтров на предмет эффективности сглаживания в режиме off-line и on-line обработки полученных данных по показателям относительного среднего квадратического и интегрального среднего отклонения от базовой линии и проведена оценка вычислительной сложности методов.

По результатам проведенных исследований сформулированы выводы о реальной эффективности применения on-line фильтрации, приведены рекомендации по их практическому использованию на аппаратных платформах локальных средств регулирования и доказано низкий уровень сглаживания off-line методов на ограниченной экспериментальной выборке. Установлено направления дальнейших исследований в направлении применения более сложных алгоритмов фильтрации для сигналов с высоким уровнем помех.

Ключевые слова: разгонная характеристика, контроллер, окно сглаживания, имитационный эксперимент, цифровой фильтр.

The condition for successful application at the local level of control of industrial controllers and programmable logic controllers is the presence of integrated software for automatic tuning of the parameters of the control algorithm. The dynamic properties of an object are most often determined by the results of an active experiment directly on the object through an identification procedure based on pre-processed data.

The main technologies of time series filtering are analyzed and the system of indicators for their comparison is selected. A series of simulation experiments to obtain overclocking characteristics with different degrees of addition of additive barriers to entry and exit are planned and conducted. Simple engineering algorithms of exponential, median, moving average simple and weighted and other window filters are investigated for the efficiency of smoothing in the mode of off-line and on-line processing of the obtained data on the indicators of relative root mean square and integral mean deviation from the baseline. methods.

Based on the results of the research, conclusions are drawn about the real effectiveness of on-line filtering, recommendations for their practical use on the hardware platforms of local controls and the low level of smoothing of off-line methods in a limited experimental sample. The directions of further researches in the direction of application of more difficult filtering algorithms for signals with a high level of interference are established.

Keywords: *overclocking characteristic, controller, smoothing window, simulation experiment, digital filter.*

Вступ

Досить часто при дослідженні динамічних характеристик промислових об'єктів вимірюється не вихідна координата $y(t)$, а сума її з деякою випадковою функцією (перешкодою) $n(t)$. Таким чином, експериментатор при знятті перехідних функцій реєструє не саму перехідну характеристику об'єкта, а випадкову функцію $z(t) = y(t) + n(t)$.

Стационарний випадковий процес $n(t)$ генерується безпосередньо в самому досліджуваному об'єкті або є випадковою перешкодою в ланцюгу вимірювання $y(t)$, чи привноситься в об'єкт іншими вхідними координатами. Як правило, $n(t)$ має нормальний закон розподілу з нульовим математичним очікуванням; спектральна щільність його близька до постійної величини в деякій смузі пропускання $[0; \omega_z]$ об'єкта.

Визначити за такою перехідною характеристикою коефіцієнти диференціального рівняння можливо лише після відповідного оброблення, що полягає у виділенні з функції $z(t)$, названої далі експериментальною перехідною функцією, істинного значення $h(t)$.

Така задача виникає при створенні систем автоматичного керування з автоматичним налаштуванням параметрів, у загальному випадку, ПД-регуляторів, які реалізовані на сучасних мікроконтролерах. Зважаючи на обмежений об'єм пам'яті таких технічних засобів, актуальною науковою задачею є вибір оптимального для конкретного мікроконтролера фільтра ефективного подавлення шумів, які присутні у вихідних даних, що підлягають подальшому обробленню.

Огляд літературних джерел

На теперішній час в інженерній практиці застосовуються цілий ряд алгоритмів фільтрації експериментальних даних. Найбільш поширеним методом згладжування, є метод ковзного середнього (рухомого вікна) [1], суть якого в тому, що в рухомому уздовж всієї кривої вікні, що містить кілька вихідних точок, середня точка обчислюється як середнє арифметичне усіх точок, що входять в це вікно. І чим більший розмір вікна, тим сильніше відбувається згладжування сигналу.

Така процедура корисна, якщо початково обрана надлишкова частота збору даних. Надлишкова частота не покращує точність аналізу, проте час обробки даних і вимоги до використовуваної пам'яті зростають.

Замість простого середнього можна використовувати зважене середнє. Зважування здійснюється з використанням різних вікон: трикутне, Ханна, Хеммінга, Гаусса, Кайзера та інші [2].

До групи методів ковзного зваженого середнього можна віднести і методи експоненціального згладжування [3]. Однак, на відміну від ковзного середнього, де в усередненні беруть участь декілька останніх значень (точки, які входять у вікно), для процедури експоненціального згладжування середнє розраховується з врахуванням всіх наявних даних. При цьому вклад пізніших значень зменшується за експоненціальним законом. Метод простий у реалізації, що зумовило широке його застосування, проте він має певні недоліки, оскільки процедура вибору параметра згладжування носить суб'єктивний характер і при зміні ситуації може вимагати переналаштування. Крім того, при наявності монотонних тенденцій цей метод дає систематичну помилку.

Савицький і Голей [4] запропонували спосіб фільтрації шумів, заснований на методи

найменших квадратів (МНК), який, незважаючи на складність моделі, простий при реалізації.

Медіанний фільтр [5,6] є альтернативою лінійним фільтрам для випадку змішаних (гаусових адитивних і імпульсних) завад. Перевага медіанного фільтра в тому, що він є найкращим з нелінійних фільтрів для подолання імпульсних та змішаних шумів. При відсутності шумів він практично без спотворень пропускає сигнали типу «різкий перепад», «ломана», «нахилений перепад» тощо, а при наявності шумів мінімально спотворює корисний сигнал у порівнянні з іншими нелінійними фільтрами.

Алгоритм Калмана - послідовний рекурсивний фільтр [7], що використовує модель динамічної системи для отримання оцінки, яка може бути істотно відкоригована в результаті аналізу кожної нової вибірки вимірювань як часової послідовності.

Цей алгоритм знаходить застосування в управлінні багатьма складними динамічними системами, наприклад, безперервними виробничими процесами.

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) є базовим алгоритмом цифрової обробки сигналів у частотній області [8]. Завдяки публікації в 1965 році статті Кулі (Cooley) і Тьюкі (Tukey) з практичним алгоритмом швидкого обчислення,

що зумовило широке його використання для цілей цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів.

Перетворення Фур'є має суттєвий недолік, який проявляється в різкому розширенні Фур'є-спектра при появі таких особливостей сигналу, як, наприклад, стрибок базової лінії. Це сильно ускладнює конструювання фільтрів, які ґрунтуються на Фур'є-спектрі.

Вейвлет-перетворення за своїми принципами подібне до перетворення Фур'є, але як базисні використовуються, як правило, функція Гауса та її похідні, а не синуси і косинуси. При вейвлет-аналізі сигнал розкладається на апроксимуючі коефіцієнти, що представляють згладжений сигнал. Інформація про шумовий компонент в основному міститься в таких коефіцієнтах, тому зазвичай саме вони обробляються при очищенні сигналу від шумів. Для фільтрації сигналу від шуму використовують наступні типи вейвлетів: вейвлет Хаара, дискретний вейвлет Мейєра, вейвлети Добеші і Сімлета [9].

Таке розкладання підходить для окремо розташованих піків і не особливо добре згладжує піки, які частково взаємно перекриваються. Для ефективного застосування вейвлет-перетворення необхідно мати апріорну інформацію про положення базової лінії і очікувану ширину піків.



Рисунок 1-Типові алгоритми згладжування експериментальних даних

Адаптивна обробка сигналів використовується тоді, коли з поставленим завданням не можуть впоратися фільтри з фіксованими параметрами. Це відбувається, як правило, у випадках, коли умови фільтрації невідомі або змінюються, а тому вимоги до параметрів фільтра не можуть бути сформульовані заздалегідь.

Адаптивні алгоритми фільтрації базуються на відомих підходах Колмогорова-Вінера [10, 11] і

відноситься до нелінійних алгоритмів. Опис основних різновидів адаптивних алгоритмів, які існують на сьогодні, можна знайти, наприклад, в [12-14]. Прообразами більшості адаптивних алгоритмів служать алгоритм Ньютона, алгоритм найшвидшого спуску і алгоритм за критерієм найменших квадратів. До простих належать різновиди градієнтних адаптивних алгоритмів за критерієм найменшого квадрата (Least Mean Square, LMS), та його

нормалізованої версії (Normalized LMS, NLMS), а до складних - різновиди рекурсивних алгоритмів за критерієм найменших квадратів (Recursive Least Squares, RLS).

Алгоритми фільтрації Калмана, Фур'є- і вейвлет-фільтри, а також адаптивні фільтри є достатньо складними у обчислювальному сенсі та вимагають значних ресурсів пам'яті, окрім *on-line* алгоритмів, тому їх застосування доцільне у випадках, коли інші прості алгоритми згладжування не справляються з поставленими задачами.

На рівні локальної автоматики доцільно застосовувати прості інженерні методи згладжування перехідних функцій (рис.1). Проте всі перераховані методи згладжування можна застосовувати, якщо відомо, що $h(t)$ має неколивний характер, тобто функція передачі об'єкта має тільки дійсні полюси.

Постановка задачі дослідження

З появою нового покоління багатоядерних 32-розрядних мікроконтролерів (наприклад, на базі *Arm Cortex*), які є базою сучасних промислових контролерів (PLC) та PID-контролерів, появилася можливість, крім традиційних алгоритмів керування та регулювання, реалізовувати складні алгоритми адаптивного та оптимального керування на рівні локальної автоматики. Цьому сприяє потужний арсенал обчислювальних можливостей мікроконтролерів, зокрема, арифметика з плаваючою комою, матрична математика та операції з комплексними числами, а також потужні бібліотеки математичної обробки (наприклад, бібліотека DSP). Важливим фактором вибору та застосування PLC в промисловості є наявність алгоритмів адаптивного налаштування регуляторів безпосередньо на об'єкті. Одним з етапів цього процесу є ідентифікація об'єкта, яку складно якісно виконати без попередньої обробки інформації. Тому в умовах обмежених ресурсів пам'яті контролерів важливо правильно підібрати прості і ефективні алгоритми згладжування даних експерименту.

Таким чином, можна сформулювати наступні задачі досліджень: провести аналіз простих інженерних методів *on-line* та *off-line* згладжування експериментальних даних; спланувати обчислювальний експеримент та підібрати параметри оцінки якості

згладжування; виконати аналіз проведених досліджень і дати рекомендації щодо ефективності застосування алгоритмів при обробці даних.

Аналіз методів фільтрації при обробленні експериментальних даних

Принципово можливий такий спосіб знаходження перехідної функції $h(t)$. Для цього необхідно отримати g експериментальних перехідних функцій $z_k(t)$, $k = \overline{1, g}$ і знайти оцінку математичного очікування за множиною значень g . Так як сигнал $n(t)$ стаціонарний і його математичне сподівання дорівнює нулю, то при досить великому g будемо мати

$$M[z(t)] = h(t) \quad \text{або} \quad h(t) \approx \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g z_k(t).$$

Для отримання достатньо достовірних результатів число експериментальних перехідних функцій g має бути не менше $40 \div 60$, що є досить обтяжливою умовою при дослідженні динамічних характеристик реальних промислових об'єктів. Тому значний інтерес представляють інженерні методи згладжування експериментальної перехідної функції, заданої таблицею рівновіддалених один від одного значень $z(t_i) = z_i$, де $t_i - t_{i-1} = \Delta t = \text{const}$, $i = \overline{0, N}$. На практиці число ординат $z(t_i)$ невелике - $N \leq 30 - 100$.

Суть різних способів згладжування зводиться до заміни фактичних рівнів часового ряду розрахунковими, що володіють меншою флуктуацією, і дають змогу виявити тенденції розвитку динамічного процесу. Іноді згладжування застосовують як попередній етап перед використанням інших методів виділення такої тенденції.

Експоненціальне згладжування (ЕМА) - один з найпростіших засобів вирівнювання послідовностей. В його основі лежить розрахунок експоненціальних середніх за таким різницеvim рівнянням [3]:

$$\hat{h}(t_i) = (1 - \alpha) \hat{h}(t_{i-1}) + \alpha z(t_i), \quad (1)$$

де α - постійний коефіцієнт ($0 \leq \alpha \leq 1$), який носить назву - постійна згладжування. Його

можна знайти через задане вікно w усереднення

$$\alpha = \frac{2}{w+1}.$$

Практика показує, що α слід вибирати в межах від 0,01 до 0,3. Перше значення експоненціального змінного середнього, приймається рівним першому значенню вихідної функції.

Експоненціальне ковзне середнє можна застосовувати повторно

$$\hat{h}_i^{(q)} = \alpha \hat{h}_i^{(q-1)} + (1-\alpha) \hat{h}_{i-1}^{(q)}, \quad (2)$$

де $\hat{h}_i^{(q)}$, $\hat{h}_{i-1}^{(q)}$ – значення експоненціального змінного середнього q -го порядку в точці i та $i-1$; $\hat{h}_i^{(q-1)}$ – значення експоненціального змінного середнього $(q-1)$ -го порядку в точці i .

Подальшим розвитком експоненціального згладжування є адаптивний алгоритм (АМА) Перрі Кауфмана [15], який є похідною від класичної формули (1) зі змінним коефіцієнтом α .

Суть методу в поєднанні швидкого ковзного середнього для врахування швидких змін сигналу (розраховується на вузькому вікні) та трендового - повільного (розраховується на широкому вікні). Причому конкретне значення ширини вікна визначається автоматично виходячи із значення коефіцієнта ефективності.

При цьому вводять три апертури: $m1$ – для обчислення коефіцієнта ефективності; f – для швидкого ковзного середнього; s – для повільного ковзного середнього.

Коефіцієнт ефективності розраховують на кожному кроці за формулою [15]

$$k_i^{(ef)} = \frac{z_i - z_{i-m1+1}}{\sum_{j=1}^{m1} |z_{i-j-1} - z_{i-j}|}.$$

Для уникнення різких переходів при перемиканнях на інший коефіцієнт ефективності доцільне його усереднення за декілька кроків.

Коригований поточний коефіцієнт згладжування визначають за таким алгоритмом адаптації [15]:

$$\alpha_i^* = \left(k_i^{(ef)} (\alpha^{(f)} - \alpha^{(s)}) + \alpha^{(s)} \right)^2,$$

де $\alpha^{(f)} = \frac{2}{f+1}$ і $\alpha^{(s)} = \frac{2}{s+1}$ – постійні

коефіцієнти експоненціального згладжування для швидкого та повільного вікна.

З врахуванням значення α_i^* адаптивний алгоритм експоненціального ковзного середнього (1) набуде такого вигляду:

$$\hat{h}(t_i) = (1 - \alpha_i^*) \hat{h}(t_{i-1}) + \alpha_i^* z(t_i).$$

Медіанний фільтр (ММА) це віконний фільтр, який послідовно ковзає по масиву значень сигналу і повертає на кожному кроці один з елементів, що потрапили у вікно (апертуру) фільтра. Вихідний сигнал y_k змінного медіанного фільтра шириною $w = 2p + 1$ для поточного відліку k формується з вхідного часового ряду ... за формулою [5]:

$$y_k = \text{med}(x_{k-p}, x_{k-p+1}, \dots, x_{k+p}) = x_{p+1},$$

де процедура med передбачає ранжування елементів у вікні в порядку зростання їх значень:

$$\tilde{x}_{-p} < \dots < \tilde{x}_{-1}; \quad \tilde{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{k+p}); \\ \tilde{x}_{-p} < \dots < x(x_1, x_2, \dots, x_{k+p}).$$

Таким чином, медіанна фільтрація здійснює заміну значень відліків в центрі апертури значенням вихідних відліків у середині вікна фільтра. На практиці апертура фільтра для спрощення алгоритмів обробки даних, як правило, встановлюється з непарним числом точок.

Якщо перехідна характеристика носить лінійний характер (хоча б на вузькій ділянці, наприклад для об'єктів без самовирівнювання), то для згладжування застосовується проста ковзна середня. Спостереження, які використовуються для розрахунку середнього значення, називаються активною ділянкою згладжування (вікно).

Метод простої ковзної середньої (SMA) [1] полягає в тому, що вихідний часовий ряд перетворюється в ряд згладжених значень (оцінок) за формулою:

$$\hat{h}_i = \frac{1}{w} \sum_{j=i-m}^{i+m} z_j, \quad (3)$$

де w - розмір вікна, j - порядковий номер точки у вікні згладжування, m - величина, яка визначається за такою формулою: $m = (w-1)/2$. Очевидно, що розмір вікна w доцільно вибирати непарним числом. Оскільки згладжування іноді необхідно проводити в режимі реального часу, то ковзне середнє розраховується не для середньої точки вікна, а для останньої, тому (3) прийме вигляд

$$\hat{h}_i = \frac{1}{w} \sum_{j=i-w}^i z_j.$$

Для спрощення обчислень доцільно [1] застосувати рекурентну формулу в такому вигляді:

$$\hat{h}_i = \hat{h}_{i-1} + \frac{1}{w}(z_i - z_{i-w}).$$

де \hat{h}_{i-1} - попереднє значення простого ковзного середнього.

У тому випадку, коли динамічна характеристика містить істотно нелінійний характер згладжування часового ряду часто проводиться за допомогою зваженої ковзної середньої. Особливо зручно застосовувати подібне згладжування в тому випадку, коли для аналізу бажано зберегти невеликі «вигини» ряду. Загальна формула згладжування зваженої ковзної середньої для режиму *off-line* має вигляд

$$\hat{h}_i = \left(\sum_{j=i-m}^{i+m} w_{g,j} \right)^{-1} \sum_{j=i-m}^{i+m} w_{g,j} z_j,$$

де $w_{g,j}$ - зважені вагові коефіцієнти. Сума зважених вагових коефіцієнтів $w_{g,j}$ рівна одиниці.

Часто для зважування коефіцієнтів застосовують правило: вага кожного члена вихідної функції, починаючи з меншого, дорівнює відповідному члену арифметичній прогресії. Цей спосіб отримав назву лінійного зваженого ковзного середнього [2] (LWMA). Для арифметичної прогресії з початковим значенням i кроком, рівним 1, формула обчислення ковзної середньої в режимі *on-line* набуде вигляду

$$\hat{h}_i = \frac{2}{w(w+1)} \sum_{j=0}^{w-1} (w-j) z_{i-j}.$$

Очевидно, що будь-яка гладка функція при довільних припущеннях може бути локально представлена поліномом з досить високим ступенем точності. Насправді, немає необхідності підбирати поліноми кожен раз. Можна показати, що ця процедура еквівалентна лінійної комбінації спостережень з коефіцієнтами, які можуть бути визначені раз і назавжди.

Допустимо, наприклад, що ми хочемо підбирати поліном k порядку для групи експериментальних даних z_i з шириною вікна p у дискретні моменти часу $i = -m, \dots$. Коефіцієнти полінома визначаються методом найменших квадратів (метод назвали RWMA - алгоритм Савицького-Голея) [4] мінімізацією критерію наближення

$$\min : \sum_{i=-m}^m \left(z_i - \sum_{r=0}^k a_r i^r \right)^2, \quad (4)$$

який подамо у матрично-векторній формі

$$\min : (\bar{z} - M\bar{a})^T (\bar{z} - M\bar{a}),$$

$$\text{де } \bar{z} = \begin{bmatrix} z_{-m} \\ z_{-m+1} \\ \dots \\ z_{-1} \\ z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{m-1} \\ z_m \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & \dots & (-m)^k \\ 1 & -m+1 & (-m+1)^2 & \dots & (-m+1)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & (-1)^2 & \dots & (-1)^k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & m-1 & (m-1)^2 & \dots & (m-1)^k \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^k \end{bmatrix}.$$

Після розкриття дужок і приведення подібних членів, останній вираз набуде такого вигляду:

$$\min : \left(\bar{z}^T \bar{z} - 2(M\bar{a})^T \bar{z} + \bar{a}^T M^T M \bar{a} \right). \quad (5)$$

Мінімізація виразу (5) за вектор-змінною \bar{a} дає такий результат: $M^T M \bar{a} = M^T \bar{z}$.

У тому випадку, коли існує матриця обернена до матриці $M^T M$ значення \bar{a} можна виразити у явному вигляді

$$\bar{a} = (M^T M)^{-1} M^T \bar{z}. \quad (6)$$

В результаті із виразу (6) отримуємо коефіцієнти $a_r, r = 0, k$ для апроксимуючих поліномів різної степені та різної ширини ковзного вікна p .

В табл.1. приведені коефіцієнти (ваги) при згладжуванні поліномами другого та третього порядку з різною довжиною вибірки та активною ділянкою в центрі вікна.

При довжині вікна $p=7$ згладжування здійснюється за формулою

$$\hat{h}_i = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -2z_{i-3} + 3z_{i-2} + 6z_{i-1} + \\ +7z_i + 6z_{i+1} + 3z_{i+2} - 2z_{i+3} \end{pmatrix}.$$

У випадку поточного згладжування активна ділянка знаходиться справа від вікна (*on-line* режим) і коефіцієнти для полінома другого порядку подані в табл.2.

Як впливає з алгоритмів обробки ковзним середнім перші і останні m точок втрачаються. Для компенсації затримки в обробці сигналу

можна використати технологію змінного розміру вікна [17], суть якого у відновленні втрачених даних перехідної характеристики за формулою:

• для початкової ділянки

$$\hat{h}_d = \frac{1}{2d-1} \sum_{i=1}^{2d-1} z_i;$$

• для кінцевої ділянки

$$\hat{h}_{N-d+1} = \frac{1}{2d-1} \sum_{i=1}^{2d-1} z_{N-i+1},$$

де $d = 1, m-1$.

Для кращого згладжування вказаних ділянок можна застосувати також такий підхід:

1. Два перших та два останніх значення згладженої перехідної функції знаходимо з наступних виразів:

$$\hat{h}_0 = z_0 - \frac{1}{5}(z_0 - 3z_1 + 3z_2 - z_3) + \frac{1}{12}(z_0 - 4z_1 + 6z_2 - 4z_3 + z_4);$$

Таблиця 1- Ваги для підрахунку ковзного середнього підбором поліномів другого та третього порядку з активним елементом у центрі вікна

Довжина інтервалу згладжування p	Вагові коефіцієнти $a_r, r = \overline{0, k}$ для елементів симетричного вікна
5	$[-3, +12, +17] \cdot 1/35$
7	$[-2, +3, +6, +7] \cdot 1/21$
9	$[-21, +14, +39, +54, +59] \cdot 1/231$
11	$[-36, +9, +44, +69, +84, +89] \cdot 1/429$
13	$[-11, 0, +9, +16, +21, +24, +25] \cdot 1/143$

Таблиця 2 - Ваги для підрахунку ковзного середнього підбором поліномів другого порядку з активним елементом справа вікна

Довжина інтервалу згладжування p	Вагові коефіцієнти $a_r, r = \overline{0, k}$ для елементів не симетричного вікна
5	$[+3, -5, -3, +9, +31] \cdot 1/35$
7	$[+5, -3, -6, -4, +3, +15, +32] \cdot 1/42$
9	$[+21, -3, -17, -21, -15, +1, +27, +63, +109] \cdot 1/165$
11	$[+18, +2, -9, -15, -16, -12, -3, +11, +30, +54, +83] \cdot 1/143$
13	$[+11, +3, -3, -7, -9, -9, -7, -3, +3, +11, +21, +33, +47] \cdot 1/91$

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 &= z_1 - \frac{2}{5}(z_0 - 3z_1 + 3z_2 - z_3) - \\ & - \frac{1}{7}(z_0 - 4z_1 + 6z_2 - 4z_3 + z_4); \\ \hat{h}_{N-1} &= z_{N-1} - \frac{2}{5}(z_{N-3} - 3z_{N-2} + 3z_{N-1} - z_N) - \\ & - \frac{1}{7}(z_{N-4} - 4z_{N-3} + 6z_{N-2} - 4z_{N-1} + z_N); \\ \hat{h}_N &= z_N + \frac{1}{5}(z_{N-3} - 3z_{N-2} + 3z_{N-1} - z_N) + \\ & + \frac{1}{12}(z_{N-4} - 4z_{N-3} + 6z_{N-2} - 4z_{N-1} + z_N). \end{aligned}$$

2. Інші члени ряду включно до m , як справа та і зліва послідовності, визначаємо з використанням технології динамічного вікна середнього ковзного або зваженого ковзного з шириною вікна $w=5$.

Численними дослідженнями свідчать, що чим вища ступінь полінома і коротший відрізок ковзання, тим ближче розрахункові значення до первинних даних. При цьому, крім тенденції можуть відтворюватися і випадкові коливання, які порушують її сенс. І навпаки, чим нижче ступінь полінома і чим довший відрізок ковзання, тим більш гладкою є перехідна характеристика і тим в більшій мірі вона відповідає властивостям тенденції, хоча помилка апроксимації буде при цьому вищою. Зважування коефіцієнтів для різних алгоритмів зваженого ковзного середнього представлені на рис.2.

Постановка імітаційного експерименту та параметри оцінювання фільтрації

Для тестування ефективності роботи алгоритмів згладжування при обробленні розгінних характеристик об'єктів керування в середовищі MatLab розроблено імітаційну модель об'єкта першого порядку з генеруванням шумів на вході та виході. Фрагмент програми наведений нижче.

```
% ===== МОДЕЛЬ =====
K0=1.0; T1=180;tau0=120;
wk1=idtf([K0],[T1 1'],'inputdelay',tau0);
% ++++++Керувальна дія ++++++
m1=9*T1+tau0;% Прогнозована довжина масиву
Tc=1; % Час дискретизації
m=ceil(m1/Tc) % Довжина масиву
u0=10; % Приріст керувальної дії
dz=[-1 1]; % Дисперсія сигналу перешкоди
```

```
%-----Шуми на вході і виході-----
x = u0+idinput(m,'rgs', dz)+idinput(m,'rbs',dz);
u = iddata([],x,1);
e=idinput(m,'rgs', 0.5*dz);
opt2 = simOptions('AddNoise',true,'NoiseData',e);
% ++++++ СИМУЛЯЦІЯ ++++++
z= sim(wk1,u,opt2);
Для зашумлення перехідної характеристики
застосовані два види сигналів: 'rbs'- випадковий
бінарний сигнал; 'rgs' - випадковий гаусовий
сигнал. Значення дисперсій випадкового
сигналу були такими:  $d_z = [0,333; 0,667; 1]$ .
Довжина експериментальної вибірки
 $N = T_e/T_c$ , де  $T_e$  – час експерименту
(тривалість перехідного процесу),  $T_c$  – час
дискретизації. Для on-line фільтрації (робота в
такті робочого циклу PLC) можна прийняти
 $T_c = 1 c$ , а для off-line фільтрації (усічена
вбірка)  $T_c = 20 c$ . Параметр  $T_c$  залежить від
інерційності об'єкта. Експерименти
проводилися серіями по  $K$ -реалізацій для
кожного алгоритму і заданого розміру вікна.
Для оцінки якості процесу згладжування в
наукових публікаціях [16] запропоновані різні
критерії, з яких будемо застосовувати такі.
```

1. $M_c(i)$ – середнє відхилення за ансамблем експериментів. Відхилення $M_c(i)$ від нуля характеризує систематичну похибку згладжування. Систематична (методична) похибка - це міра зміщенням згладженого значення за рахунок властивостей методу. Її не можна виключити, так як форма сигналу задалегідь невідома. Вона повинна враховуватися в сумарні похибки оцінки згладженого значення.

$$M_c(i) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (\hat{h}(i, j) - h(i)), \quad i = \overline{1, N}, \quad (7)$$

де $h(i)$ – істинне значення незашумленої перехідної характеристики в i -й точці; $\hat{h}(i, j)$ – значення зашумленого сигналу в i -й точці j -го експерименту після застосування процедури згладжування; N - загальне число точок; K - число експериментів в ансамблі.

2. S_r - стандартне відхилення, розраховане за K згладженими експериментальними вибірками. S_r є характеристикою випадкової похибки згладжування :

$$S_r(i) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (\hat{h}(i, j) - h(i) - M_c(i))^2}, \quad (8)$$

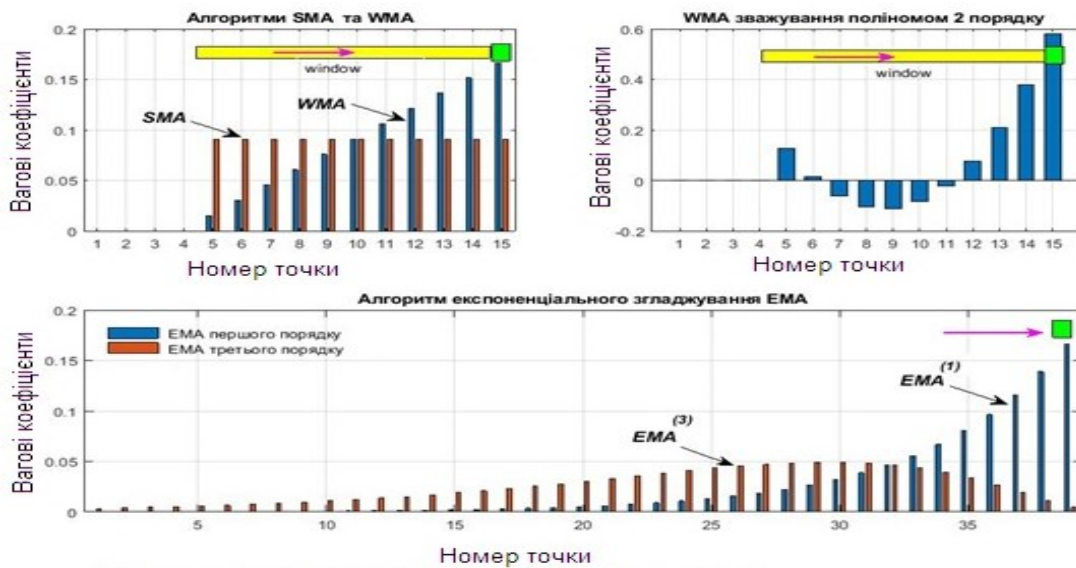
$i = \overline{1, N}$.

3. R - відношення S_r/S_t , яке характеризує випадкову похибку у відсотках

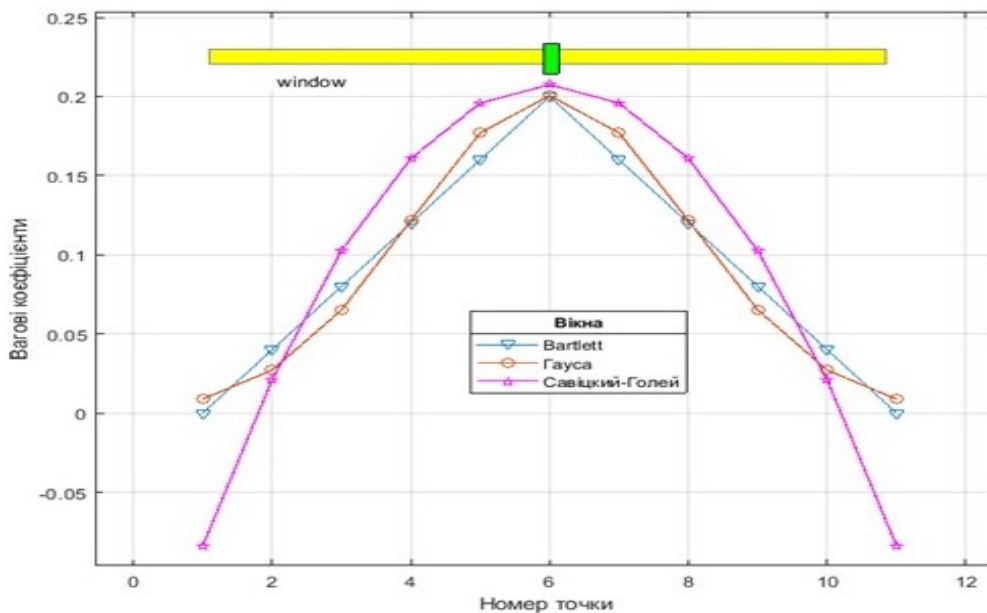
$$R(i) = \frac{S_r(i)}{S_t(i)} \cdot 100\%, \quad i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

де $S_t(i)$ - середнє стандартне квадратичне відхилення сигналу від нуля

$$S_t(i) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (\hat{h}(i, j) - h(i))^2}, \quad i = \overline{1, N}.$$



а) алгоритми придатні для *on-line* згладжування



б) алгоритми придатні для *off-line* згладжування

Рисунок 2 - Різні технології зважування коефіцієнтів для ковзного середнього ($window=11$)

Відношення (9) дає змогу оцінити величину систематичного відхилення в остаточному результаті згладжування: чим менші значення $S_r(i)$ і $S_i(i)$, тим якісніше згладжування у відповідній точці вибірки. Для методів, заснованих на ковзному середньому, параметр $M_c(i)$, характеризується нескінченно великою статистикою, яку можна отримати, застосувавши відповідний фільтр до сигналу без шумів $h(i)$ з наступним відніманням сигналу $\hat{h}(t)$ з виходу фільтра.

Наведені тренди дають змогу виконувати візуальний і кількісний аналіз результатів згладжування.

Для інтегральної оцінки вибрані такі показники.

1. *BNR (baseline noise reduction)* - величина, що дорівнює відношенню стандартного середньоквадратичного відхилення шуму на вході S_n до шуму згладжених даних S_i :

$$BNR = \frac{S_n}{S_i}. \quad (10)$$

2. *MC* – інтегральна середня оцінка зміщення при фільтрації

$$MC = \frac{\sum_{i=1}^N M_c(i)}{Nh_\infty(t)} \cdot 100\%, \quad (11)$$

де N – число експериментальних точок.

3. Відсоток випадкової похибки

$$RC = \frac{S_r}{S_i} \cdot 100\%. \quad (12)$$

Для оцінки стандартного відхилення на основі незміщеної оцінки дисперсії використано відому формулу

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X})^2},$$

де $\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$; $X_i = \hat{h}(i) - h(i) - M_c(i)$.

При розрахунку значень S_n і S_r , та параметр X_i відповідно рівний - $X_i = z(i) - h(i)$;

$$X_i = \hat{h}(i) - h(i).$$

Оцінку обчислювальної складності алгоритмів можна здійснити шляхом поопераційного підрахунку, але в даному випадку запропонована інша процедура. Для кожного методу фіксується час виконання алгоритму за допомогою MatLab - функцій керування таймером *tic (пуск таймера)* та *toc (контроль таймера)*. Тобто $tv_i = tv_{si} - tv_{pi}$, де tv_i - час виконання i - алгоритму; tv_{si} , tv_{pi} – відповідно час закінчення та початку роботи алгоритму.

Відносне значення параметра TV_i розраховували за такою формулою:

$$TV_i = \frac{tv_i}{\max : tv_i} \cdot 100\%, \quad i = \overline{1, df}, \quad \text{де } df \text{ - кількість}$$

досліджуваних алгоритмів.

Таким чином, алгоритмічна структура проведення досліджень була такою:

$$IN \langle T_c, dz, N, K \rangle \Rightarrow \langle z(i, j), method, w \rangle \Rightarrow \langle \hat{h}(i, j) \rangle \Rightarrow \langle version, M_c, S_r, S_i, R, BNR, MC, TV \rangle.$$

Дані структуровані в кортежах на кожному етапі досліджень: *sim*- симуляція серій перехідних характеристик; *filter*– згладжування вхідних даних заданим методом і розміром вікна; *control* – оцінка якості згладжування набором вибраних показників для *version* досліджу, яка визначається рівнем заданих шумів dz . На останньому етап *control* спочатку відбувається локальне усереднення за серіями, а потім визначають інтегральні показники за вибіркою.

Для реалізації розглянутих алгоритмів згладжування в середовищі Matlab є стандартні функції, які можна застосувати для оброблення даних:

$y = filter(b, a, x)$ - цифровий фільтр;

$y = medfilt1(x, p)$ -медіанний фільтр з вікном p .

Цифровий фільтр має раціональну передавальну функцію, яка у формі z -перетворення має такий вигляд:

$$Y(z) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n_b)z^{-n_b}}{a(1) + a(2)z^{-1} + \dots + a(n_a)z^{-n_a}} X(z),$$

де n_a – порядок фільтра зворотного зв'язку, а n_b – порядок фільтра подачі.

Через нормалізацію допускаємо, що $a(1) = 1$.

Якщо відома функція передачі фільтра, то можна записати різницеве рівняння, яке можна програмно реалізувати на мікроконтролерах

$$y(k) = b(1)x(k) + b(2)x(k-1) + \dots + b(n_b+1)x(k-n_b) - a(2)y(k-1) - \dots - a(n_a+1)y(k-n_a),$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

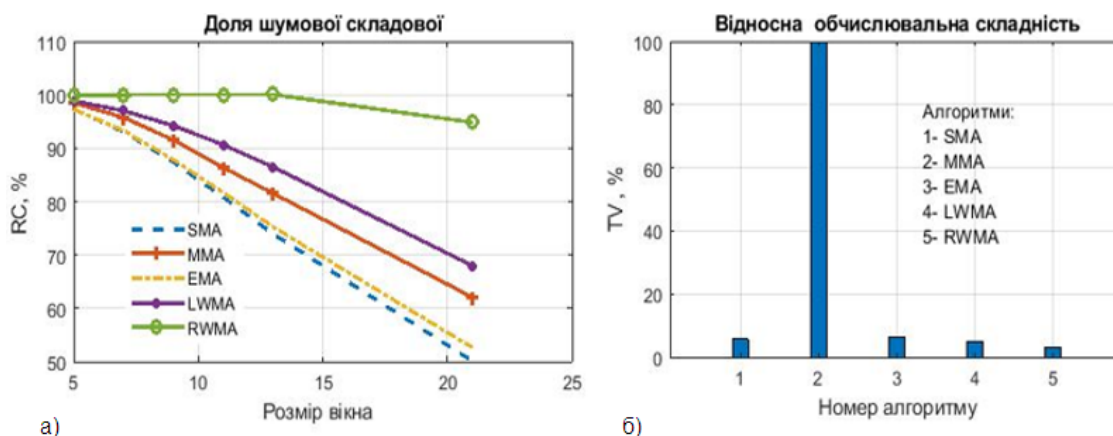


Рисунок 3 - Аналіз методичної похибки *on-line* методів згладжування

При реалізації алгоритмів *SMA*, *LWMA* *RWMA* компоненти вектора \bar{b} - вагові коефіцієнти для елементів ковзного вікна, а вектор $\bar{a} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots]$. Для алгоритму *EMA* параметри фільтра задають у такий спосіб: $b = [\alpha]$, $a = [1 \ (1-\alpha)]$. Алгоритм *medfilt1()*

розрахований на оброблення даних, коли активний елемент знаходиться у центрі вікна, тому значення виходу необхідно зсунути на край вікна або замість даного алгоритму застосувати безпосередньо MatLab-функцію *median()*.

Аналіз результатів досліджень

Проведення експерименту та аналіз реалізацій по серіях ($K=10;50;100$ дослідів в серії) з використанням критеріїв (7-9) показав, що критерії (8-9) мають приблизно сталі величини вздовж усередненої вибірки за серією, які залежать тільки від параметра K при різних методах згладжування, розмірах вікна та значень дисперсії шуму, тому їх використання надалі є недоцільним. Це свідчить про те, що в процесі обробки даних алгоритмами не вносяться додаткові зсуви окрім систематичної похибки методу, яка контролюється параметром MC . Проаналізуємо цей параметр детальніше. Методична похибка при згладжуванні в реальному часі є природною, оскільки

фільтрація ґрунтується на використанні ковзного несиметричного вікна. Критерієм оцінки служить абсолютне (або абсолютне зважене до величини нового усталеного значення) відхилення від базової лінії.

При пропусканні сигналу через фільтр можна знайти відхилення вихідного сигналу від базової лінії (перехідна характеристика без накладання перешкод). Ця величина характеризує методичну похибку MC , яку вносить фільтр при обробленні сигналу. Значення похибки MC у кожній точці масиву даних вхідного сигналу показані на рис. 3,а.

Як видно з рис.3,а в точці відриву від попереднього усталеного значення, де формується різкий перехід, згладжений сигнал відстає від базової лінії і при цьому формується методична похибка MC . Для врахування динаміки зміни MC доцільно контролювати максимальне його значення, а не середнє за вибіркою. Найменші значення MC притаманні для фільтра *RWMA*. Максимальне відхилення MC залежить від розмірів вікна та часу квантування вхідного сигнал T_c (рис.3,б і 3,в). Якщо задати приведену абсолютною похибку фільтрації, наприклад, на рівні 2.5% (за умовами експерименту $h_{\infty}(t) = 10$ і відповідно $MC = 0,25$), тоді об'єм вибірки N

треба взяти не менший за 1100-1200 точок, що відповідає часу дискретизації вимірювань

$T_c = 1c$ для модельного об'єкта.

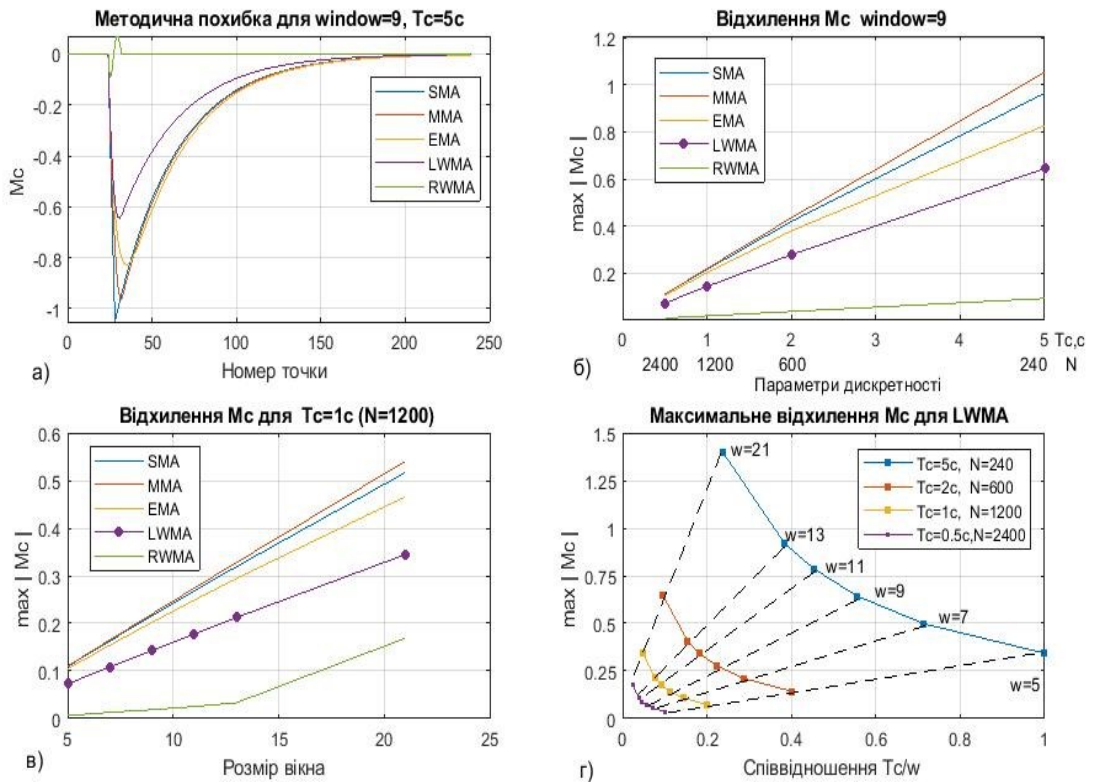


Рисунок 4 - Оцінка алгоритмів згладжування за критеріями RC та TV

Таким чином, для *on-line* режиму згладжування в алгоритмах *SMA*, *MMA*, *EMA* можна застосувати вікно розміром до $w=11$, для *LWMA* – до $w=13$, а для *RWMA*- до $w=21$ і більше (рис.3,г). На рис.3,г застосований, як аргумент відношення T_c/w , що локалізувало графік $\max |MC| = f(T_c, w)$ на площині і спростило його аналіз.

Доля випадкової складової при відхиленні сигналу на виході фільтра від базової лінії (критерій *RC*) подана на рис.4,а. Видно, що шумова складова знижується з ростом розміру вікна згладжування, але ця тенденція супроводжується ростом методичної похибки. Комплексна інтегральна оцінка роботи алгоритмів згладжування забезпечується критеріями *BNR* і *MC*. Значення показників *BNR* і *MC* в залежності від розмірів вікна наведені на рис.5,а та рис.5,б і відповідають трьом серіям дослідів з різними рівнями

дисперсії шуму в досліджуваних розгінних характеристиках модельного об'єкта. Аналіз результатів моделювання при низькому та середньому рівні зашумлення (дослід 1 та 2) свідчить, що найкраще згладження реалізується алгоритмом *LWMA*, оскільки рівень шумів знижується у 2,4 рази при цьому абсолютне відхилення від базової лінії складає відповідно $MC=-0,34\%$ (дослід 1, $w=11$) та $MC=-0,26\%$ (дослід 2, $w=13$), що є прийнятним для практики. Наступними за ефективністю згладжування йдуть алгоритми *SMA* та *EMA*, в яких максимальний параметра $BNR=2,3$, а $MC=-0,36\%$. Непогані фільтруючі властивості демонструє і алгоритм *MMA* з $BNR \approx 2$ та $MC \approx -0,35\%$. Очевидно, що не бажано застосувати алгоритм *RWMA*, оскільки рівень подавлення перешкод (для $w=5-13$) не перевищує 1,34 рази, хоча при цьому має місце низький рівень значення параметра *MC*.

Для досліджу 3 з високим рівнем шумів спостерігається така градація: за показником BNR для вікна $w=13$ - SMA , $EMA-3,1$; $LWMA-2,9$;

$MMA-2,4$; $RWMA-1,38$. При цьому за рахунок систематичної похибки зростає зміщення від базової лінії, але воно не перевищує 0,5%.

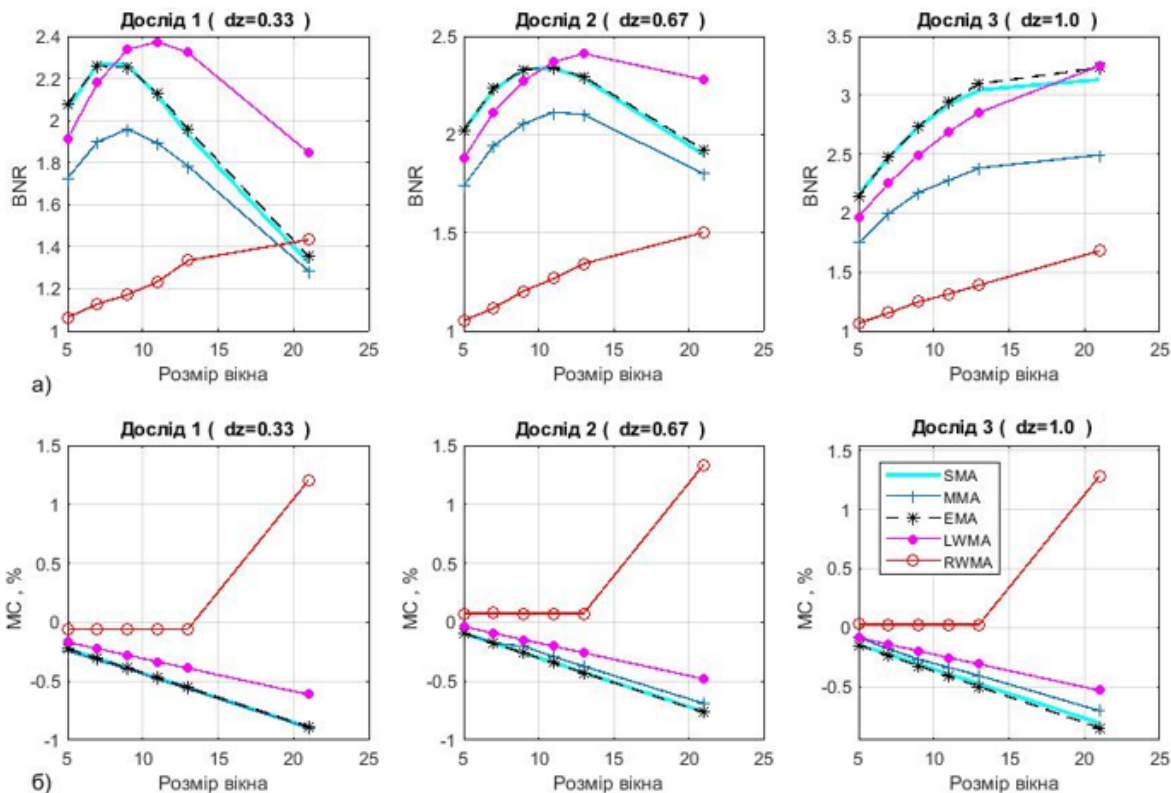


Рисунок 5 - Інтегральні оцінки BNR і MC для трьох дослідів

Якщо оцінювати обчислювальну складність алгоритмів (рис.4,б), то слід відмітити найвищий рівень складності для алгоритму MMA , всі інші алгоритми за відносним показником TV складають від 3% до 6%. Алгоритм медіанної фільтрації (MMA) для елементів вікна передбачає спочатку їх сортування з подальшим відбором середнього елемента, що суттєво ускладнює алгоритм оброблення даних.

Всі інші алгоритми ковзного середнього передбачають процедуру множення елементів вікна на ваговий коефіцієнт з подальшим знаходженням суми. За рахунок початкової підготовки вагових коефіцієнтів швидкодія алгоритмів (SMA , $LWMA$, EMA , $RWMA$) дещо відрізняється між собою, хоча у всіх застосовується базова функція цифрового фільтра $filter()$.

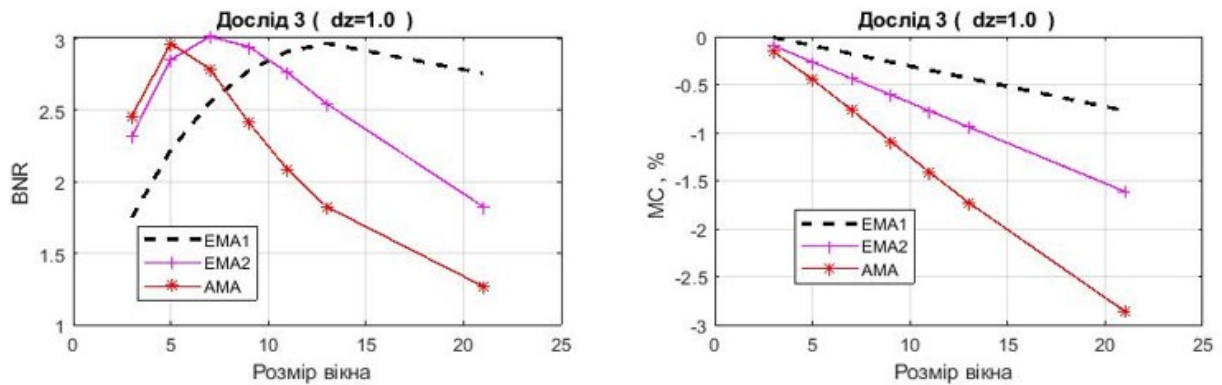


Рисунок 6 - Дослідження модифікацій алгоритму *EMA*

Дослідження, які представлені рис. 6, мали за мету визначення порівняльних характеристик різних модифікацій алгоритму середнього експоненціального згладжування *EMA*: *EMA1*- звичайне згладжування; *EMA2*- згладжування другого порядку; *AMA*- адаптивне згладжування з параметрами $f=2$, $s=w$, $m1=21$. Доцільність використання модифікацій алгоритму

перевірялась на перехідній характеристиці з високим рівнем перешкод. Порівняння за показниками *BNR* та *MC* не підтвердило доцільність їх застосування на модельованих характеристиках динаміки об'єкта, оскільки при $BNR \approx 3$ спостерігається ріст відставання сигналу від базової лінії

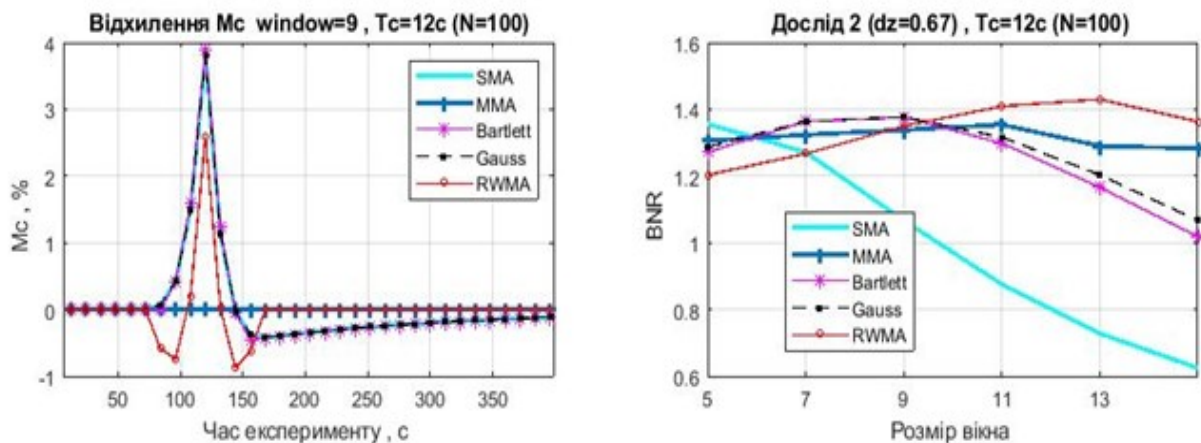


Рисунок 7- Оцінка роботи *off-line* алгоритмів

Оскільки об'єм вибірки, яка фіксується за результатами активного експерименту в контролері обмежена (30-100 точок), виконані дослідження *off-line* алгоритмів на предмет їх ефективності при згладжуванні. Якщо оцінити систематичну похибку Mc при застосуванні розглянутих алгоритмів (рис.7), то слід підкреслити, що всі алгоритми ковзного зваженого середнього (SMA, WMA з вікном 'Bartlett', 'Gauss' та Савіцького-Голея) мають достатньо високу похибку, максимальне

значення якої лежить в межах 2,5 до 4%. У медіанного фільтра відсутня методична похибка, що пов'язано з монотонним зростанням розгінної характеристики. Показник *BNR* для оптимального розміру вікна $w=9$ (для SMA- $w=5$) складає 1,35-1,37. При зростанні часу квантування (наприклад, $T_c = 24c$) та відповідно зниження довжини експериментальної вибірки до $N=50$ інтегральний показник *BNR* зменшується для всіх фільтрів практично до одиниці, крім *MMA*,

що свідчить про відсутність зниження рівня шумів при згладжуванні.

Таким чином, практичне застосування для *off-line* обробки на обмеженому масиві даних має алгоритм медіанної фільтрації *MMA*.

Висновки

В результаті аналізу ефективності алгоритмів згладжування в режимі реального часу за вибраною системою показників можна зробити наступні висновки.

1. Фільтри *SMA*, *LWMA* та *EMA* забезпечують найкращі показники зниження рівня шумів близько в 2,3-2,4 рази при низькому та середньому рівні перешкод та 2,8-3,0 рази при значному рівні зашумлення, при цьому відносна абсолютна похибка не перевищує 0,35% при розмірах вікна (9-13) та 0,5 % при значному рівні шумів, а обчислювальна складність алгоритмів є одного порядку.

2. Алгоритм *MMA* має показник *BNR* близько 2 (що дещо нижче порівняно з *SMA*, *LWMA*, *EMA*), тому може бути рекомендований до використання, не зважаючи на суттєво вищу його обчислювальну складність майже у 20 разів по відношенню перерахованих вище алгоритмів.

3. Повторне застосування (наприклад *EMA*) фільтрів або їх комбінування з метою підвищення рівня фільтрації малоефективне і при цьому зростає обчислювальна складність вдвоє.

4. Алгоритм фільтрації *RWMA* та адаптивний *EMA* недоцільно застосовувати в режимі реального часу.

Для вторинної *off-line* обробки можна застосувати медіанний фільтр, що дасть змогу додатково знизити рівень шумів до 25% за показником *BNR* без внесення додаткової систематичної похибки.

Таким чином, алгоритми фільтрації *SMA*, *LWMA*, *EMA* та *MMA* слід використовувати при експериментальних дослідженнях динамічних властивостей об'єктів керування і доцільно ввести їх до бібліотеки алгоритмів *PLC*. При значному рівні імпульсних перешкод можна рекомендувати медіанний фільтр *MMA*. Напрямки подальших досліджень можуть бути пов'язані з розробкою рекомендацій по використанню алгоритмів Калмана, Фур'є і вейвлет-перетворення та адаптивних фільтрів

при значному рівні перешкод накладених на розгінну характеристику.

Література

1. Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Second Edition. San Diego, California: California Technical Publishing. 1999. P. 297.

2. Digital signal processing : a practical approach / Emmanuel C. Ifeachor, Barrie W. Jervis. Wokingham, England ; Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1993. 760 p.

3. Brown G. Robert, Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. – N.Y.: Dover Phoenix Editions, 2004. 480 p.

4. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures // Anal. Chem. 1964. 36 p. 1627–1639. doi:10.1021/ac60214a047.

5. Astola J., Kuosmanen P. Fundamentals of digital filtering. Boca Raton (USA): CRC Press LLC. 1997. 276 p.

6. Нелинейная фильтрация сигналов./С.К.Абрамов, В.И. Кортунюв, В.В. Лукин.-Учеб.пособие.- Харьков:Нац.аэрокосм.ун-т «Харьк. авиац.ин-т», 2007. 78 с.

7. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Eng. 1960. 82. P. 35–45. doi:10.1115/1.3662552.

8. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 838с.

9. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

10. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1941. 5. С. 3–14.

11. Wiener N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, New York: Wiley, 1949. 176 p.

12. Уидроу Б., Стирнз С.Д. Адаптивная обработка сигналов./Пер. с англ. под ред. Шахгильдяна В.В. М.: Радио и связь, 1989. 440с.

13. Sayed A.H. Fundamentals of adaptive filtering. – NJ, Hoboken: John Wiley and Sons, Inc., 2003.- 1168 p

14. Diniz P.S.R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation. Third edition. – New

York, Springer Science + Business Media, 2008. 627 p.

15. Perry J. Kaufman Smarter Trading: Improving Performance in Changing Markets — McGraw-Hill, Inc., 1995, 257 p. — ISBN 0-07-034002-1

16. Каламбет Ю.А., Козьмин Ю.П., Самохин А.С. Фильтрация шумов. Сравнительный анализ методов// Аналитика. № 5/2017(36), с. 88-101.

17. Oppenheim, Alan V., Ronald W. Schaffer, and John R. Buck. Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999. 870 p.

References

1. Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Second Edition. San Diego, California: California Technical Publishing, 1999. P. 297.

2. Digital signal processing : a practical approach / Emmanuel C. Ifeakor, Barrie W. Jervis. Wokingham, England ; Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1993. 760 p.

3. Brown G. Robert, Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. – N.Y.: Dover Phoenix Editions, 2004. 480 p.

4. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures // Anal. Chem. 1964. 36 p. 1627–1639. doi:10.1021/ac60214a047.

5. Astola J., Kuosmanen P. Fundamentals of digital filtering. Boca Raton (USA): CRC Press LLC, 1997. 276 p.

6. Nelineynaya filtratsiya signalov./ S.K. Abramov, V.I. Kortunov, V.V. Lukin.-

Ucheb.posobie.-Harkov:Nats.aerokosm.un-t «Hark. aviats.in-t», 2007. 78 s.

7. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Eng. 1960. 82. P. 35–45. doi:10.1115/1.3662552.

8. Rabiner L., Gould B. Teoriya i primenenie tsifrovoy obrabotki signalov. M.:Mir, 1978. 838s.

9. Malla S. Veyvlyeti v obrabotke signalov. M.: Mir, 2005. 671 s. .

10. Kolmogorov A.N. Interpolirovanie i ekstrapolirovanie statsionarnykh sluchaynykh posledovatelnostey // Izv. AN SSSR. Ser. Matem. 1941. 5. S. 3–14.

11. Wiener N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, New York: Wiley, 1949. 176 p.

12. Uidrou B., Stirnz S.D. Adaptivnaya obrabotka signalov./Per. s angl. pod red. Shahgildyana V.V. M.: Radio i svyaz, 1989. 440s.

13. Sayed A.H. Fundamentals of adaptive filtering. – NJ, Hoboken: John Wiley and Sons, Inc., 2003.- 1168 p

14. Diniz P.S.R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation. Third edition. – New York, Springer Science + Business Media, 2008. 627 p.

15. Perry J. Kaufman Smarter Trading: Improving Performance in Changing Markets — McGraw-Hill, Inc., 1995, 257 p. — ISBN 0-07-034002-1

16. Kalambet Yu.A., Kozmin Yu.P., Samohin A.C. Filtratsiya shumov. Sravnitelnyy analiz metodov// Analitika. # 5/2017(36), s. 88-101.

17. Oppenheim, Alan V., Ronald W. Schaffer, and John R. Buck. Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999. 870 p.