

УДК 681.51

DOI: 10.31471/1993-9981-2021-2(47)-105-108

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ ПАВОДКОВИХ ЯВИЩ

*М. О. Карнаш, А. П. Олійник, Л. І. Фешанич*

*Інститут інформаційних технологій, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: kafatp@ukr.net*

В роботі на підставі багаторічних спостережень за розвитком паводкових явищ в регіоні запропоновано математична модель розвитку паводкових явищ на основі апарату систем лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь, які пов'язують рівень паводкових вод, здатність середовища поглинати воду – а саме проникність ґрунтового середовища, рівень зелених насаджень, гідротехнічне забезпечення тощо, рівень опадів в регіоні, ефективність коштів, що виділяються на засоби та заходи по боротьбі з паводковими явищами. Неоднорідності в системі рівнянь описують режим опадів в регіоні та об'єм коштів, що спрямовуються на протипаводкові заходи. Система доповнюється відповідними початковими умовами. Коефіцієнти моделі визначаються за методом експертних оцінок з використанням критерію неупередженості Кенделла, за яким встановлюються рівень узгодженості експертів. При побудові обчислювальної схеми використовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності та відповідне програмне забезпечення його реалізації. Проведена параметрична ідентифікація моделі з метою такого вибору коефіцієнтів моделі, який би забезпечував адекватність моделі реальній системі. Всі розрахунки проводились в безрозмірному вигляді. Наведено результати моделювання, визначено напрямки подальших досліджень, які будуть присвячені впровадженню моделі на реальних підприємствах та службах, задачею яких є попередження виникнення паводкових явищ, особливо в зоні можливого підтоплення об'єктів нафтогазового комплексу.

**Ключові слова:** математичне моделювання диференціальні рівняння, метод експертних оцінок, критерій узгодженості Кенделл.

В работе на основании многолетних наблюдений за развитием паводковых явлений в регионе предложена математическая модель развития паводковых явлений на основе аппарата систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые связывают уровень паводковых вод, способность среды поглощать воду – а именно проницаемость почвенной среды, уровень зеленых насаждений, гидротехническое обеспечение и т.п., уровень осадков в регионе, эффективность средств, выделяемых на мероприятия по борьбе с паводковыми явлениями. Неоднородности в системе уравнений описывают режим осадков в регионе и объем средств, направляемых на противопаводковые меры. Система дополняется соответствующими начальными условиями. Коэффициенты модели определяются методом экспертных оценок с использованием критерия беспристрастности Кенделла, согласно которому устанавливаются уровень согласованности экспертов. При построении вычислительной схемы используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности и программное обеспечение его реализации. Произведена параметрическая идентификация модели с целью такого выбора коэффициентов модели, обеспечивающей адекватность модели реальной системе. Все расчеты производились в безразмерном виде. Приведены результаты моделирования, определены направления дальнейших исследований, посвященных внедрению модели на реальных предприятиях и службах, задачей которых является предупреждение возникновения паводковых явлений, особенно в зоне возможного подтопления объектов нефтегазового комплекса.

**Ключевые слова:** математическое моделирование дифференциальные уравнения, метод экспертных оценок, критерий согласованности Кенделла.

In the work on the basis of long-term observations of the development of flood phenomena in the region, a mathematical model of the development of flood phenomena based on the apparatus of linear inhomogeneous ordinary systems is proposed. Such model allows us to estimate the level of flood waters, the ability of the environment to absorb water - namely the permeability of the soil, the level of greenery, hydraulic support, etc., the level of precipitation in the region, the effectiveness of funds allocated to measures and measures to combat floods/ Heterogeneities in the system of equations describe the precipitation regime in the region and the amount of funds allocated for flood control measures. The system is supplemented by appropriate initial conditions. The coefficients of the model are determined by the method of expert estimates using the criterion of Kendall's impartiality/ When constructing a computational scheme, the fourth-order Runge-Kutta method and the corresponding software for its implementation are used. The parametric identification of the model is carried out in order to select the coefficients of

the model, which would ensure the adequacy of the model to the real system. All calculations were performed in dimensionless form. The results of modeling are given, the directions of further researches which will be devoted to introduction of model at the real enterprises and services which task is the prevention of occurrence of the flood phenomena, especially in a zone of possible flooding of objects of an oil and gas complex are defined.

**Keywords:** mathematical modeling of differential equations, method of expert estimates, Kendall consistency criterion.

При моделюванні поведінки екологічних систем широкого застосування набувало методи математичного моделювання і, зокрема, методи, що базуються на використанні систем диференціальних рівнянь. Найбільш та історично пріоритетними в цьому є роботи Лотка і Вольтерра [1], а також, диференціальні моделі наведені в [1-3]. Перевагою у використанні цього апарату є та обставина, що появляється можливість надання якісного рівня моделей

При цьому розглядаються можливості описання реальних об'єктів та процесів з використанням систем звичайних диференціальних рівнянь, серед яких виділяється клас лінійних систем зі системами коефіцієнтів.

Розглядається наступна модель: нехай  $y_1(t)$  – рівень паводкових вод,  $y_2(t)$  – кількісна характеристика здатності поглинання паводкових вод (проникність ґрунтового середовища, рівень зелених насаджень, гідротехнічне забезпечення тощо)  $y_3(t)$  – кількісна характеристика зміни і паводкових вод та опадів в регіоні. При цьому слід зазначити, що у вказаній системі присутні дві функції від часу – одна з них  $F_1(t)$  характеризує інтенсивність опадів в регіоні та  $F_2(t)$  характеризує інтенсивність капіталовкладень на протиаводкові заходи.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t) + k_3 y_3(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = -k_4 y_3(t) - k_5 y_1(t) + F_2(t) \\ \frac{dy_3}{dt} = F_1(t) - k y_3(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

з початковими умовами :

$$y_1(t) = 0.2, y_2(t) = 1.0, y_3(t) = 0.8. \quad (2)$$

Перше з рівнянь системи (1) встановлює той факт, що швидкість зміни рівня паводкових вод залежить від наступних в факторів

- від початкового рівня води в ріці;
- від кількості опадів в регіоні;
- від здатності ґрунтів поглинати воду, що надходить ззовні.

Друге рівняння системи встановлює, що здатність до поглинання наслідків паводку залежить, точніше, її швидкість, залежить від таких факторів:

- від інтенсивності опадів;
- від рівня паводкових вод;
- від коштів, що виділяються на заходи по боротьбі з паводками.

Третє рівняння системи встановлює, що швидкість надходження опадів в регіон залежить від експериментально визначеної функції інтенсивності опадів та самого рівня опадів, який не може безкінечно зростати.

Функції  $F_1(t)$  та  $F_2(t)$  задаються наступним чином

$$F_1(t) = c_1 / (1.0 + c_2(t - t_1)^2)$$

– функція, яка характеризує швидкість зміни опадів та надходження паводком води,  $F_2(t)$  – модельна функція, що характеризує витрати на протиаводкові заходи. На першому етапі вважається сталою, 0.2 – 0.6.

Система типу (1) є певним розширенням відомої моделі типу «хижак – жертва». Запропоновано алгоритми знаходження коефіцієнтів системи (1) методом експертних оцінок, причому при моделюванні системи (1) встановлено додаткові умови на її коефіцієнтів з точки зору одержання асимптотично стійких розв'язків. Введення нелінійних складових в систему (1) дозволяє одержати розв'язки, які точніше відображають суть явищ та процесів, що моделюються.

Для практичного використання запропонованої моделі, яка є неоднорідною, необхідно визначити концепцію визначення коефіцієнтів  $K_i$ .

Можна використати один із варіантів методу експертних оцінок, який полягає в наступному [4,5]: група експертів у кількості  $N$  спеціалістів досліджують наступні питання: в якій мірі пов'язані між собою величини  $y_1(t)$   $y_2(t)$   $y_3(t)$  – через коефіцієнти  $K_i$  ( $i=1, \dots, 8$ ). Кожен із експертів заповнює таблицю, в якій для кожного з коефіцієнтів  $K_i$  виставляє оцінку від  $U_{min}$  до  $U_{max}$ . В результаті для кожного коефіцієнта  $K_i$  одержується сума балів:

$$U_i = \sum_{j=1}^N U_{ij}, \quad (3)$$

де,  $U_{ij}$  – оцінка, яку коефіцієнту  $K_i$  виставив  $j$ -й експерт.

Вказана інформація може бути використана при встановленні величин  $K_i$ :

$$K_i = \frac{U_i}{\sum_{s=1}^8 U_s}, \quad (4)$$

при цьому  $0 \leq K_i \leq 1$ , проте, в окремих випадках практичне використання з метою забезпечення стійкості розрахунків та наглядності подання результатів величини  $K_i$  можуть бути обчислені за формулою:

$$K_i = \frac{U_i}{\sum_{s=1}^8 U_s}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5)$$

Величина  $A$  та  $B$ , що входять в систему (1) визначаються в певному масштабі принаймні до того часу, поки за результатами статистичних даних не будуть отримані їх реальні значення. В окремих випадках вибір коефіцієнтів може бути здійснений емпірично, без використання умов або умови рівності суми всіх  $K_i$  одиниці.

При виборі коефіцієнтів моделі для перевірки неупередженості експертів використовується критерій Кенделла [5,6], який полягає в наступному: нехай  $N$  – число коефіцієнтів моделі, які підлягають визначенню,  $M$  – число залучених експертів,  $R_{ij}$  - ранг  $i$ -ого коефіцієнта на думку  $j$ -ого експерта,  $D_i$  – сума рангів  $i$ -ого коефіцієнта у всіх експертів,  $W$  – коефіцієнт конкордації Кенделла,

$$W = \frac{12}{M^2(N^3-N)} \sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2 \quad (6)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^M R_{ij}, \quad (7)$$

$$\bar{D} = \frac{M(N+1)}{2} \quad (8)$$

Якщо  $W > 0,75$ ,  $0 \leq W \leq 1$ , вважається що думка експертів (4)–(6) є об'єктивною, неупередженою та такою, що відповідає особливостям модельованого явища.  $k_1=0.2$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $k_3 = 0.3 - 0.5$ ,  $k_4 = 0.3 - 0.5$ ,  $k_5 = 0.3 - 0.5$ ,  $K=0.02-0.1$

В даному випадку система може бути розв'язана точно, але неоднозначне тлумачення і вигляд модельних функцій  $F_1(t)$  та  $F_2(t)$  вимагає застосування чисельних методів Рунге – Кутта, достатній рівень точності забезпечують методи четвертого порядку. Нижче приводяться результати модельних розрахунків у відповідному програмному середовищі.

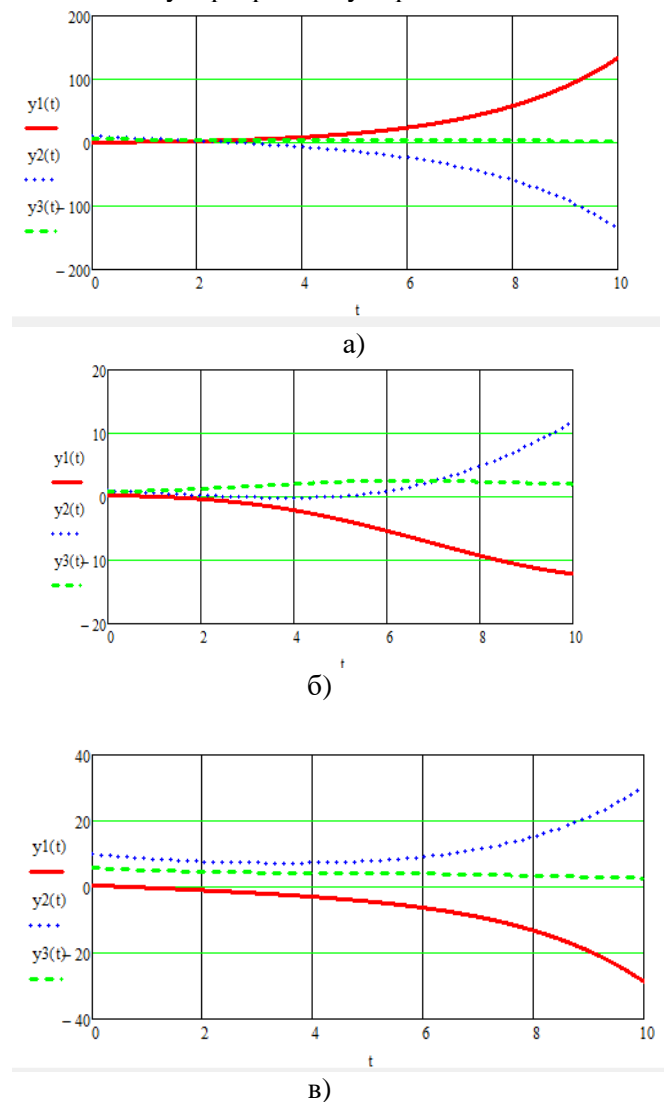


Рисунок 1 – Оптимізація параметрів системи шляхом її параметричної ідентифікації

Як видно з рисунку 1, для даної моделі шляхом підбору її коефіцієнтів (параметричної ідентифікації [7]) встановлено параметри моделі, які, з одного боку, відповідають параметрам системи, якісно точно описують, а, з іншого боку, не вимагають її удосконалення відносно типу даної моделі – системи лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь.

Напрямки подальших досліджень полягають у проведенні комплексних розрахунків для реальних даних системи, які б не носили модельний характер, у перевірці адекватності моделей при різних параметрах системи.

### Література

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288с.

2. Відходи виробництва і споживання та їх вплив на ґрунти і природні води: [навч. посіб.] / В. М. Савицький, В. К. Хільчевський, О. В. Чунар'ов, М. В. Яцюк. За ред. В.К. Хільчевського. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2007. 152 с.

3. Головатий Ю.Д. Диференціальні рівняння / Ю.Д. Головатий, В.М. Кирлич, С.П. Лавренюк. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 470 с.

4. Самарский А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. М.: Физматлит, 2005. 320с.

5. Моделирование та оптимізація систем / [В.М. Дубовой, Р.Н. Кветний, О.І. Михальов, А.В. Усов]. Вінниця: ПП «ТД Едельвейс», 2011. 804 с.

6. Карпаш М.О. Підвищення надійності упровадження нових стандартів для систем діагностування з урахуванням умов експлуатації. / М.О. Карпаш, А.П. Олійник, А.М. Ключень, Г.М. Когут // Стандартизація, сертифікація, якість. 2018. №2(109). с.60 – 65.

7. Аністратенко В.О. Математичне планування в АПК / В.О. Аністратенко, В.Г. Фролов. К.: Вища школа, 1993. 374 с.

### References

1. Volterra V. Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovanie / V. Voldterra. Moskva Izhevsk: Institut kompyuternyih issledovaniy, 2004. 288 p.

2. Vidkhody vyrobnytstva i spozhyvannia ta yikh vplyv na ґrunty i pryrodni vody: [navch. posib.] / V. M. Savytskyi, V. K. Khilchevskiy, O. V. Chunarov, M. V. Yatsiuk. Za red. V.K. Khilchevskoho. – K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr «Kyivskiy universytet», 2007. 152 p.

3. Holovaty Yu.D. Dyferentsialni rivniannia / Yu.D. Holovaty, V.M. Kyrlych, S.P. Lavreniuk. – Lviv: LNU im. Ivana Franka, 2011. 470 p.

4. Samarskiy A. A. Matematicheskoe modelirovanie / A. A. Samarskiy, A. P. Mihaylov. M.: Fizmatlit, 2005. 320 p.

5 Modeliuvannia ta optymizatsiia system / [V.M. Dubovoi, R.N. Kvietnyi, O.I. Mykhalov, A.V. Usov]. – Vinnytsia: PP «TD Edelweis», 2011. 804 p.

6 Karpash M.O. Pidvyshchennia nadiinosti uprovadzhennia novykh standartiv dlia system diahnostuvannia z urakhuvanniam umov ekspluatatsii. / M.O. Karpash, A.P. Oliinyk, A.M. Kliun, H.M. Kohut // Standartyzatsiia, sertyfikatsiia, yakist. 2018. №2(109). P.60 – 65.

7. Anistratenko V.O. Matematychnе planuvannia v APK / V.O. Anistratenko, V.H. Frolov. K.: Vyshcha shkola, 1993. 374 p.