

УДК 681.51

DOI: 10.31471/1993-9981-2022-2(49)-74-88

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПЕНСАТОРА ПЕРЕХРЕСНИХ ЗВ'ЯЗКІВ АВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

М. І. Горбійчук, Н. Т. Лазорів, М. І. Козутяк, А. М. Лазорів

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, м.Івано-Франківськ, Україна, 76019, e-mail: gorb@nung.edu.ua*

Сучасні муфельні печі - універсальні нагрівальні пристрої, які використовують як для лабораторних досліджень, так і для нагрівання невеликих виробів. Конструктивною особливістю муфельних печей є наявність муфеля, який виготовляється з термостійкого матеріалу і розмежує робочий простір печі та зразок, що нагрівається.

Муфельна піч агрегат періодичної дії. Процеси нагріву в муфельній печі протікають в три стадії – нагрів печі до певної температури, робочий режим і охолодження. Перші дві стадії повинні виконуватись в автоматичному режимі і забезпечувати необхідну точність підтримування температури при реалізації другої стадії.

У даній роботі розглядається муфельна піч з двома нагрівниками (тенами), які мають два незалежні джерела живлення, що зумовлює два канали передачі впливів «потужність тена-температура в печі». Дослідження показали, що між входами і виходами об'єкта (муфельної печі) існують не тільки прямі, але й перехресні зв'язки, наявність яких значно ускладнює процес керування температурним режимом у муфельній печі. Для усунення негативної дії перехресних зв'язків у роботі синтезовано компенсатор та досліджено його динамічні властивості.

Отримана матрична передавальна функція компенсатора та знайдені її елементи у вигляді відношення двох поліномів, порядок яких визначається порядком передавальних функцій об'єкта.

Оскільки передавальні функції муфельної печі мають високий порядок, то розроблений метод декомпозиції, який дає змогу подати відповідні передавальні функції у вигляді паралельного з'єднання типових ланок першого і другого порядку. Зроблена декомпозиція значно спрощує перехід від неперервної моделі до дискретного її представлення в термінах z-перетворення.

Ключові слова: муфельна піч, перехресні зв'язки, компенсатор, передавальні функції, декомпозиція, z-перетворення, оцінка, точність.

Muffle furnaces are used to heat various small products to a given temperature. A design feature of muffle furnaces is the presence of a muffle, which is made of heat-resistant material and delimits the working space of the furnace and the heated sample.

Modern muffle furnaces are universal heating devices that are used both for laboratory research and for heating small products.

Muffle furnace unit of periodic action. Heating processes in a muffle furnace proceed in three stages - heating the furnace to a certain temperature, operating mode and cooling. The first two stages must be performed in automatic mode and ensure the necessary accuracy of temperature maintenance during the implementation of the second stage.

This work considers a muffle furnace with two heaters (thena), which have two independent power sources, which causes two channels of transmission of influences "thena power-temperature in the furnace". Studies have shown that between the inputs and outputs of the object (muffle furnace) there are not only direct, but also cross connections, the presence of which greatly complicates the process of controlling the temperature regime in the muffle furnace. In order to eliminate the negative effect of cross-connections, a compensator was synthesized in the work and its dynamic properties were investigated.

The matrix transfer function of the compensator was obtained and its elements were found in the form of a ratio of two polynomials, the order of which is determined by the order of the transfer functions of the object.

Since the transfer functions of the muffle furnace have a high order, a decomposition method has been developed, which makes it possible to present the corresponding transfer functions in the form of a parallel connection of typical links of the first and second order. The decomposition made greatly simplifies the transition from the continuous model to its discrete representation in terms of the z-transformation.

Key words: muffle furnace, cross couplings, compensator, transfer functions, decomposition, z-transform, evaluation, accuracy.

Вступ. У роботі [1] досліджені властивості муфельної печі, яка має два незалежних джерела живлення, та встановлено, що вона відноситься до класу багатомірних об'єктів. Характерною особливістю таких об'єктів є взаємовплив між вхідними і вихідними величинами, що значно ускладнює процес керування. При проектуванні систем автоматичного керування багатомірними об'єктами стараються в той чи інший спосіб ліквідувати або ослабити дію перехресних зв'язків. Цього можна добитись різними способами: за допомогою модального керування, з використанням методу динамічного програмування та за допомогою автономного керування. При використанні методу автономного керування багатомірним об'єктом основною задачею є синтез компенсатора, який покликаний «ліквідувати» перехресні зв'язки або значно зменшити їх вплив на якість процесу керування.

Аналіз літературних джерел. Проблема керування багатомірними об'єктами виникає в таких галузях промисловості як хімічна, нафтопереробна, харчова, енергетична, газова та в ін. Для керування такими об'єктами використовувались одноконтурні системи автоматичного регулювання методи синтезу проектування, яких ґрунтувались [2] на добре розробленому методі логарифмічних частотних характеристиках. При цьому важко було добитись задовільних показників якості процесу керування через внутрішні зв'язки між технологічними параметрами об'єкта. Виниклі труднощі були поштовхом до розвитку таких напрямків теорії керування як аналітичне конструювання регуляторів [3], модальне керування [4], H^∞ оптимізація [5] та аналітичні методи синтезу систем автоматичного керування [6, 7].

Методи аналітичного конструювання регуляторів та модального керування дають змогу синтезувати оптимальні керуючі дії, якщо модель об'єкта задана у просторі станів.

Метод аналітичного конструювання регуляторів та метод модального управління дають можливість синтезувати тільки пропорціональні регулятори.

У роботі [8] запропонований метод, названий авторами, керуванням по виходам і впливам, який реалізує розімкнену стратегію керування на відміну від принципу керування за відхиленням (за зворотним зв'язком).

Метод керування по виходам і впливам дає змогу за заданим розподілом нулів і полюсів системи отримати бажані показники якості процесу керування.

З іншої сторони неточності у математичному описі об'єкта та невраховані зовнішні впливи, які компенсуються в системах зі зворотним зв'язком, можуть значно погіршити кількісні показники якості процесу керування.

Майже в усіх методах синтезу систем керування багатомірними об'єктами вирішується задача знаходження так званої матриці узгодженості, призначення якої компенсація перехресних зв'язків, що дає змогу покращити якісні та кількісні показники процесу керування.

Метою роботи є синтез компенсатора перехресних зв'язків та обчислення параметрів матричної передавальної функції компенсатора.

Поставлена мета досягнута внаслідок розв'язання таких задач:

– за допомогою розробленого програмного забезпечення обчислити параметри матричної передавальної функції компенсатора;

– розробити спосіб декомпозиції передавальних функцій високого порядку та розробити методику представлення динамічних властивостей компенсатора в термінах z-перетворення;

– оцінити похибки, які виникають, при переході від аналогової до дискретної моделі компенсатора.

Виклад основного матеріалу. У даній роботі розглядається тип муфельних печей, які мають два роздільних джерела живлення, що зумовлює наявність двох каналів передачі керуючих впливів, які породжують додаткові зв'язки, що значно погіршує якість керування такими об'єктами. Одним із способів зменшення взаємовпливу вхідних величин на регульовані вихідні величини є введення у контур системи керування компенсатора перехресних зв'язків,

призначення яких повністю ліквідувати або значно зменшити такі взаємовпливи.

Структурна схема компенсатора зображена [1] на рис.1, а параметри передавальних функцій муфельної печі як об'єкта автоматичного керування вміщує табл. 1.

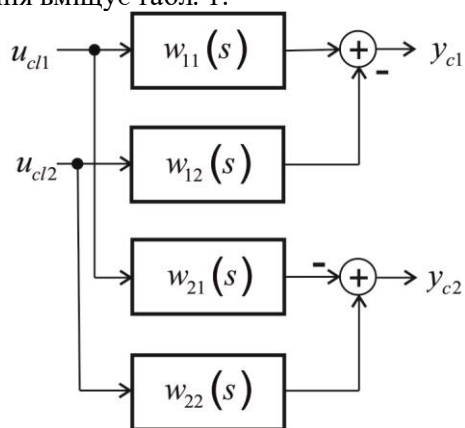


Рисунок 1 – Структурна схема компенсатора перехресних зв'язків

На рис. 1 u_{cl1} і u_{cl2} - вихідні сигнали регуляторів, а y_{c1} і y_{c2} - виходи компенсатора, які є командними сигналами, що поступають на об'єкт керування.

Передавальні функції компенсатора $w_{ij}(s)$, $i = j = 1, 2$ обчислюють [9] за такими формулами:

$$w_{11}(s) = \frac{W_{11}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)};$$

$$w_{12}(s) = -\frac{W_{12}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)};$$

$$w_{21}(s) = -\frac{W_{21}(s)W_{11}(s)}{\Delta(s)};$$

$$w_{22}(s) = \frac{W_{11}(s)W_{22}(s)}{\Delta(s)},$$

де $\Delta(s) = W_{11}(s)W_{22}(s) - W_{12}(s)W_{21}(s)$.

Можна показати [1], що порядки поліномів чисельників і знаменників передавальних функцій $w_{ij}(s)$, $i = j = 1, 2$ компенсатора мають однакові порядки і дорівнюють $2(3n-1)$, де n - порядок передавальних функцій $W_{ij}(s)$, $i = j = 1, 2$. Як випливає із табл. 1 всі передавальні функції об'єкта мають однакові порядки і $n = 3$.

Таблиця 1 – Параметри емпіричних моделей

Передавальні функції	k	Параметри чисельника ПФ			Параметри знаменника ПФ			
		b_0	b_1	b_2	a_0	a_1	a_2	a_3
$W_{11}(s)$	468.25	7828.23	97.77	1	559116.88	16854.16	206.53	1
$W_{12}(s)$	150,00	10401.34	136.80	1	1596016.46	34051.10	290.59	1
$W_{21}(s)$	459.25	7724.32	97.20	1	612374.61	17821.93	211.50	1
$W_{22}(s)$	172.88	9560.48	111.38	1	1133264.06	26531.02	254.91	1

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, отримані передавальні функції компенсатора перехресних зв'язків. Загальна структура передатної функції компенсатора має вигляд

$$w(s) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i s^{n-i}}{\sum_{k=1}^n a_k s^{n-k}}. \quad (1)$$

Коефіцієнти у виразах (1) для відповідних каналних коректорів наведені у табл. 2 - табл.4.

Математичну модель компенсатора (рис. 1) запишемо у матрично-векторній формі

$$\begin{bmatrix} y_{c1}(s) \\ y_{c2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{cl1}(s) \\ u_{cl2}(s) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Із рівняння (1) знаходимо

$$y_{c1}(s) = w_{11}(s)u_{cl1}(s) + w_{12}(s)u_{cl2}(s),$$

$$y_{c2}(s) = w_{21}(s)u_{cl1}(s) + w_{22}(s)u_{cl2}(s).$$

Для лінійних систем справедливий принцип суперпозиції. Тому

$$y_{c1}(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t), \quad (3)$$

$$y_{c2}(t) = y_{22}(t) + y_{21}(t), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{де } y_{11}(t) &= L^{-1} \left[w_{11}(s) u_{c1}(s) \right]; \\ y_{12}(t) &= L^{-1} \left[w_{12}(s) u_{c2}(s) \right]; \\ y_{22}(t) &= L^{-1} \left[w_{22}(s) u_{c2}(s) \right]; \\ y_{21}(t) &= L^{-1} \left[w_{21}(s) u_{c1}(s) \right]. \end{aligned}$$

Символом L^{-1} позначено зворотнє перетворення Лапласа.

На рис. 2 зображені графіки функцій $y_{c1}(t)$ і $y_{c2}(t)$, які побудовані за допомогою програмного забезпечення, створеного в середовищі MatLab. На всі входи компенсатора подавався одиничний стрибкоподібний сигнал. Тому $u_{c1}(s) = u_{c2}(s) = \frac{1}{s}$.

Таблиця 2 – Параметри коректора по каналу $w_{11}(s) = w_{22}(s)$

i,k	b_i	a_k	i,k	b_i	a_k
0	3.752e36	1.53e36	9	2.269e22	5.466e21
1	4.807e35	1.856e35	10	1.752e20	3.96e19
2	3.016e34	1.101e34	11	1.09e18	2.306e17
3	1.225e33	4.229e32	12	5.349e15	1.059e15
4	3.597e31	1.173e31	13	2.007e13	3.711e12
5	8.081e29	2.486e29	14	5.431e10	9.366e09
6	1.435e28	4.16e27	15	9.493e07	1.523e07
7	2.053e26	5.601e25	16	8.095e04	1.206e04
8	2.389e24	6.128e23			

Таблиця 3 – Параметри коректора по каналу $w_{12}(s)$

i,k	b_i	a_k	i,k	b_i	a_k
0	-1.597e36	4.367e36	9	- 8.863e21	8.489e21
1	- 2.057e35	4.912e35	10	- 6.688e19	5.778e19
2	- 1.291e34	2.711e34	11	- 4.055e17	3.163e17
3	- 5.224e32	9.704e32	12	- 1.938e15	1.365e15
4	- 1.523e31	2.514e31	13	- 7.064e12	4.492e12
5	-3.385e29	4.985e29	14	- 1.855e10	1.064e10
6	- 5.93e27	7.815e27	15	- 3.142e07	1.625e07
7	- 8.346e25	9.869e25	16	-25932	1.206e04
8	- 9.531e23	1.014e24			

Таблиця 4 – Параметри коректора по каналу $w_{21}(s)$

$,k$	b_i	a_k	$,k$	b_i	a_k
	-8.053e36	8.267e35	9	- 5.447e22	4.262e21
	- 1.039e36	1.05e35	10	- 4.273e20	3.203e19
	- 6.58e34	6.511e33	11	- 2.699e18	1.934e17
	- 2.702e33	2.609e32	12	- 1.346e16	9.205e14
	- 8.03e31	7.541e30	13	- 5.123e13	3.341e12
	-1.828e30	1.664e29	14	- 1.406e11	8.733e09
	- 3.292e28	2.896e27	15	- 2.491e08	1.471e07
	- 4.779e26	4.053e25	16	-2.15e05	1.206e04
	- 5.647e24	4.605e23			

Компенсатори перехресних зв'язків з передавальними функціями $w_{ij}(s)$ можна реалізувати на цифрових спеціалізованих обчислювальних пристроях або промислових

контролерах, але важливо при цьому, забезпечити їхню адекватність аналоговому варіанту. Особливістю цифрових коректорів є представлення їх вхідних та вихідних сигналів у вигляді гратчастих функцій з постійним кроком

дискретизації. З цієї метою подамо передавальні функції $w_{ij}(s)$ у термінах Z-перетворення.

Можливі декілька варіантів реалізації дискретних коректорів, які відрізняються структурами представлення передатних функцій для реалізації:

- пряма форма $w(z)$;
- каскадна (послідовна) структура

$w(z) = \prod_{k=1}^L H_k(z)$ з бікватратними секціями 2-го

порядку $H_k(z)$. Секції утворюються після

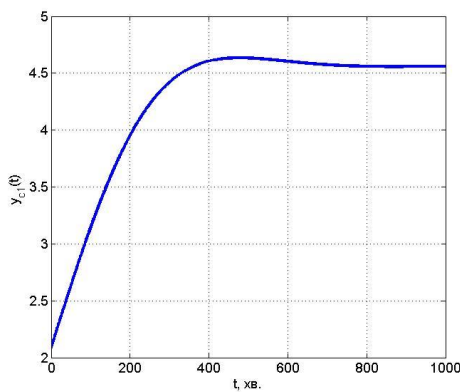
попарного об'єднання за певними правилами полюсів та нулів $w(z)$;

- паралельна структура

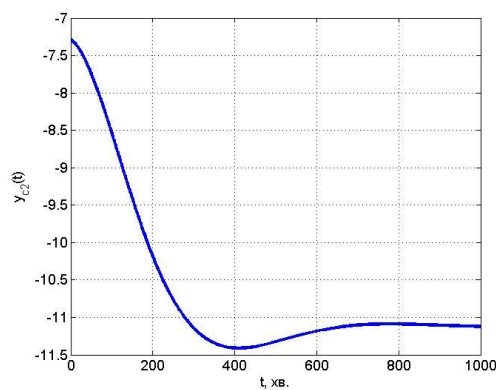
$w(z) = C + \sum_{k=1}^L H_k(z)$ з секціями $H_k(z)$ першого

та другого порядку.

Секції утворюються після розкладу $w(s)$ на прості множники, з наступним переходом в Z-область та об'єднання комплексно-спряжених полюсів.



а)



б)

Рисунок 2 – Графіки залежностей $y_{c1}(t)$, а і $y_{c2}(t)$, б

Каскадна та паралельна структура представлення коректора (фільтра) мають практичне застосування при реальній реалізації на локальних контролерах в умовах обмеженої розрядності процесора. Вони забезпечують вищу точність при округленні коефіцієнтів, проміжних результатів обчислення та уникнення переповнення акумуляторів обчислення сум у порівнянні з прямою реалізацією. Розглянемо детальніше метод отримання паралельної структури передавальної функції дискретного коректора.

Оскільки передавальні функції компенсатора $w_{ij}(s)$, $i = j = 1, 2$ мають однакові структури, то в подальших викладках опускаємо індекси, які визначають належність відповідної передавальної функції до певного каналу передачі сигналу. Тому в подальшому будемо розглядати передавальну функцію $w(s)$ як відношення двох поліномів –

чисельника $R(s) = \sum_{j=0}^n b_j s^{n-j}$ і знаменника

$Q(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}$, які мають однакові порядки n ($n=16$).

У тому випадку, коли передавальна функція – це відношення двох поліномів і $m=n$, де $m = \deg R(s)$ і $n = \deg Q(s)$, виділимо цілу частину відношення $\frac{R(s)}{Q(s)}$ і «залишок», який є

також відношенням двох поліномів. Отже,

$$w(s) = \left[\frac{R(s)}{Q(s)} \right] + \frac{\mathfrak{R}(s)}{Q(s)}, \quad (5)$$

де $\left[\frac{R(s)}{Q(s)} \right]$ - ціла частина відношення двох поліномів $\frac{R(s)}{Q(s)}$; $\mathfrak{R}(s)$ - поліном степені $n-1$, отриманий у результаті ділення.

Виконавши ділення полінома $R(s)$ на поліном $Q(s)$, прийшли до такого результату:

$$\left[\frac{R(s)}{Q(s)} \right] = \frac{b_0}{a_0}, \quad (6)$$

$$\mathfrak{R}(s) = \sum_{j=1}^n \left(b_j - \frac{b_0}{a_0} a_j \right) s^{n-j}. \quad (7)$$

Другий доданок у правій частині формули (5) розкладемо на прості множники, тобто

$$\frac{\mathfrak{R}(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-s_i}. \quad (8)$$

У формулі (8) r_i залишки, які для простих коренів s_i , $i = \overline{1, n}$ характеристичного полінома $Q(s)$, обчислюють за таким співвідношенням:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s-s_i) \frac{\mathfrak{R}(s)}{Q(s)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Поліном $Q(s)$ запишемо як добуток простих множників

$$Q(s) = a_0 \prod_{k=1}^n (s-s_k),$$

де s_k - прості полюси передавальної функції, серед яких можуть бути комплексно-спряжені.

Отже, коефіцієнти r_i розкладу (8) можна обчислити за такою формулою:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s-s_i) \frac{\mathfrak{R}(s)}{a_0 \prod_{k=1}^n (s-s_k)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\frac{b_0}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j s_i^{n-j} = \frac{b_0}{a_0} \left(\sum_{j=1}^n a_j s_i^{n-j} + a_0 s_i^n - a_0 s_i^n \right) = \frac{b_0}{a_0} \left(\sum_{j=0}^n a_j s_i^{n-j} - a_0 s_i^n \right). \quad (13)$$

Поліном $Q(s)$ запишемо у такій формі:

$$Q(s) = a_0 (s-s_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s-s_k).$$

Тоді

$$r_i = \frac{\mathfrak{R}(s_i)}{a_0 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s_i-s_k)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Враховання формули (7) дає змогу вираз (10) подати у такому вигляді:

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^n \left(b_j - \frac{b_0}{a_0} a_j \right) s_i^{n-j}}{a_0 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s_i-s_k)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Оскільки у виразах $w(s)$ і $\frac{\mathfrak{R}(s)}{Q(s)}$

одинакові знаменники, то формули для знаходження коефіцієнтів r_i від виразів $w(s)$ і $\frac{\mathfrak{R}(s)}{Q(s)}$ будуть відрізнятись лише чисельниками.

Тому візьмемо до уваги чисельник у формулі (5), який будемо обчислювати при значенні $s = s_i$

$$\mathfrak{R}(s) = \sum_{j=1}^n \left(b_j - \frac{b_0}{a_0} a_j \right) s_i^{n-j}.$$

Враховуючи те, що операція взяття суми - лінійна операція, будемо мати

$$\mathfrak{R}(s) = \sum_{j=1}^n b_j s_i^{n-j} - \frac{b_0}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j s_i^{n-j}. \quad (12)$$

Другий доданок, у правій частині формули (12), подамо у такому вигляді:

Оскільки s_i – корінь рівняння $Q(s)=0$, то $Q(s_i) = \sum_{j=0}^n a_j s_i^{n-j} = 0$. Враховуючи останню обставину, вираз (13) набуде такого значення:

$$\frac{b_0}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j s_i^{n-j} = -b_0 s_i^n.$$

Підстановка отриманого значення для виразу $\frac{b_0}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j s_i^{n-j}$ у формулу (12), дає такий результат:

$$\Re(s) = \sum_{j=1}^n b_j s_i^{n-j} + b_0 s_i^n = \sum_{j=0}^n b_j s_i^{n-j}.$$

Отримане значення $\Re(s)$ підставимо у вираз (10). У результаті отримуємо

$$r_i = \frac{\sum_{j=0}^n b_j s_i^{n-j}}{a_0 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s_i - s_k)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Таким чином, отримуємо таку формулу для розкладу передавальної функції $w(s)$ для випадку, коли $\deg R(s) = \deg Q(s) = n$:

$$w(s) = r_0 + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - s_i}, \quad (15)$$

де $r_0 = \frac{b_0}{a_0}$; r_i обчислюється за формулою (14).

На відміну від MatLab residue-функції, яка заснована на діленні полінома чисельника на поліном знаменника з наступним виділенням залишку $\frac{\Re(s)}{Q(s)}$, до якого застосовують процедуру обчислень r_i за формулою (9), розроблений алгоритм не вміщує операції ділення полінома $R(s)$ на $Q(s)$.

Формулу (15) запишемо у такому еквівалентному вигляді:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) w(s), \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Як впливає із рис. 2 функції $y_{c1}(t)$ і $y_{c2}(t)$ мають коливний згасаючий характер.

Це означає, що серед полюсів передавальної функції $w(s)$ є комплексно-спряжені.

Допустимо, що серед полюсів передавальної функції $w(s)$ є n_r дійсних коренів, а $n - n_r$ - це комплексно-спряжені корені.

Як показує рис. 2 сигнали на виході компенсатора з плином часу прямують до постійного значення. Це означає, дійсні частин полюсів передавальної функції $w(s)$ є від'ємними числами (полюси функції $w(s)$ є лівими).

У випадку комплексно-спряжених полюсів, як це впливає із формули (14), коефіцієнти розкладу r_i , $i = \overline{1, n - n_r}$ також будуть комплексно-спряженими.

Позначимо дійсні корені полінома $Q(s)$ через $s_j = -\sigma_j$, $j = \overline{1, n_r}$, а для комплексно-спряжених введемо такі позначення: $s_i = -\alpha_i \pm j\beta_i$, $i = \overline{1, (n - n_r)/2}$. Тоді $r_i = \eta_i \pm j\mu_i$, $i = \overline{1, (n - n_r)/2}$.

З врахуванням значень полюсів s_k і s_i та формули (16), отримуємо

$$r_j = \lim_{s \rightarrow -\sigma_j} (s - s_i) w(s), \quad j = \overline{1, n_r}, \quad (17)$$

$$r_i = \lim_{s \rightarrow -\alpha_i + j\beta_i} (s - s_i) w(s) + \lim_{s \rightarrow -\alpha_i - j\beta_i} (s - s_i) w(s), \quad i = \overline{1, (n - n_r)/2}. \quad (18)$$

Якщо прийняти до уваги формули (17) і (18), то вираз (15) набуде такого значення:

$$w(s) = r_0 + \sum_{j=1}^{n_r} \frac{r_j}{s + \sigma_j} + \sum_{i=1}^{(n-n_r)/2} \frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i}. \quad (19)$$

У формулі (19) кожний доданок слід розглядати як деяку передавальну функцію, для яких знайдемо Z – перетворення за умови, що на вході кожного із елементів, як описуються передавальними функціями $w_j(s)$, $k = \overline{1, n_r}$ і $w_i(s)$, $i = \overline{1, (n - n_r)/2}$, розміщений фіксатор нульового порядку.

Нехай $w(s)$ передавальна функція, яка задана як відношення двох поліномів $R(s)$ і $Q(s)$, і має місце таке співвідношення: $\deg(R(s)) \leq \deg(Q(s))$. Тоді [10]

$$w(z) = (1 - z^{-1}) \sum_{k=1}^{n_p} \text{Res} \left[\frac{w(s)}{s} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{st_0}} \right]_{s=s_k}, \quad (20)$$

де n_p – кількість коренів рівняння $sQ(s) = 0$.

Співвідношення (19) показує, що рівняння $sQ(s) = 0$ має тільки один простий корінь $s_1 = 0$. Знайдемо лишок для значення $s_1 = 0$. Отже,

$$\text{Res} \left[\frac{w(s)}{s} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{st_0}} \right]_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} w(s) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{st_0}} = \frac{w(0)}{1 - z^{-1}}$$

З врахуванням отриманого результату формула (20) набуде такого вигляду:

$$w(z) = w(0) + (1 - z^{-1}) \sum_{k=1}^{n_p-1} \text{Res} \left[\frac{w(s)}{s} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{st_0}} \right]_{s=s_k}. \quad (21)$$

Використовуючи формулу (21), знайдемо

$$Z \left[\frac{r_j}{s + \sigma_j} \right] = \frac{r_j}{\sigma_j} \frac{(1 - \theta_j) z^{-1}}{1 - \theta_j z^{-1}}, \quad (22)$$

$$Z \left[\frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i} \right] = \frac{\eta_i - j\mu_i}{\alpha_i + j\beta_i} + \frac{\eta_i + j\mu_i}{\alpha_i - j\beta_i} + (1 - z^{-1}) \left[\frac{\eta_i + j\mu_i}{(-\alpha_i + j\beta_i)(1 - (\varphi_{i,1} + j\varphi_{i,2})z^{-1})} + \frac{\eta_i - j\mu_i}{(-\alpha_i - j\beta_i)(1 - (\varphi_{i,1} - j\varphi_{i,2})z^{-1})} \right]. \quad (24)$$

Після виконання необхідних арифметичних операцій над правою частиною рівності (24), отримаємо такий результат:

$$Z \left[\frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i} \right] = 2\eta_i \left[\frac{\pi_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} + (1 - z^{-1}) \frac{-\pi_i + \left(a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} \right) z^{-1}}{(-\alpha_i + a_{1,i} z^{-1})^2 + (\beta_i + a_{2,i} z^{-1})^2} \right], \quad (25)$$

$$i = 1, (n - n_r)/2,$$

де $a_{1,i} = \alpha_i \varphi_{i,1} + \beta_i \varphi_{i,2}$; $a_{2,i} = \alpha_i \varphi_{i,2} - \beta_i \varphi_{i,1}$,
 $\pi_i = \alpha_i - \frac{\mu_i}{\eta_i} \beta_i$.

де $\theta_j = e^{-\sigma_j t_0}$; t_0 – час дискретності.

У відповідності з формулою (19) та, враховуючи значення $r_i = \eta_i \pm j\mu_i$, $i = 1, (n - n_r)/2$, $s_1 = -\alpha_i + j\beta_i$ і $s_2 = -\alpha_i - j\beta_i$, де $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i > 0$, маємо

$$\frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i} = \frac{\eta_i + j\mu_i}{s - (-\alpha_i + j\beta_i)} + \frac{\eta_i - j\mu_i}{s - (-\alpha_i - j\beta_i)}, \quad i = 1, (n - n_r)/2. \quad (23)$$

У формулі (22) знайдемо Z – перетворення від кожного доданку. За формулою (21) знаходимо Z – перетворення від першого

$$Z \left[\frac{\eta_i + j\mu_i}{s - (-\alpha_i + j\beta_i)} \right] = \left[\frac{\eta_i + j\mu_i}{\alpha_i - j\beta_i} + (1 - z^{-1}) \frac{\eta_i + j\mu_i}{(-\alpha_i + j\beta_i)(1 - (\varphi_{i,1} + j\varphi_{i,2})z^{-1})} \right]$$

і від другого доданків

$$Z \left[\frac{\eta_i - j\mu_i}{s + \alpha_i + j\beta_i} \right] = \left[\frac{\eta_i - j\mu_i}{\alpha_i + j\beta_i} + (1 - z^{-1}) \frac{\eta_i - j\mu_i}{(-\alpha_i - j\beta_i)(1 - (\varphi_{i,1} - j\varphi_{i,2})z^{-1})} \right],$$

де $\varphi_{i,1} = \theta_{1,i} \cos(\beta_i t_0)$; $\varphi_{i,2} = \theta_{1,i} \sin(\beta_i t_0)$;
 $\theta_{1,i} = e^{-\alpha_i t_0}$.

Враховуючи лінійність Z – оператора, маємо

Після виконання очевидних арифметичних лій над правою частиною формули (25) та враховуючи прийняті позначення, отримаємо

$$Z \left[\frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i} \right] = \frac{2\eta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \cdot \frac{\left(a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} + (1 - 2\varphi_{i,1})\pi_i \right) z^{-1} + \left(\theta_{1,i}^2 \pi_i - a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} - a_{1,i} \right) z^{-2}}{1 - 2\varphi_{i,1} z^{-1} + \theta_{1,i}^2 z^{-2}}. \quad (26)$$

З врахуванням формул (22) вираз (26) буде таким:

$$w(z) = r_0 + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{r_k}{\sigma_k} \cdot \frac{(1 - \theta_k) z^{-1}}{1 - \theta_k z^{-1}} + 2 \sum_{i=1}^{(n-n_r)/2} \frac{\eta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \cdot \frac{\left(a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} + (1 - 2\varphi_{i,1})\pi_i \right) z^{-1} + \left(\theta_{1,i}^2 \pi_i - a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} - a_{1,i} \right) z^{-2}}{1 - 2\varphi_{i,1} z^{-1} + \theta_{1,i}^2 z^{-2}}. \quad (27)$$

Тоді передавальна функція (27) буде такою:

$$w(z) = V_1(z) + \sum_{j=1}^{n_r} V_j^{(2)} + \sum_{i=n_r+1}^{(n+n_r)/2} V_i^{(3)}. \quad (28)$$

Формула (28) дає змогу створити структурну схему передачі сигналу по каналу з передавальною функцією $w(z)$ (рис.3).

Для передавальної функції $w(z)$ можна записати таку рівність:

$$y(z) = w(z)u_{cl}(z),$$

де $u_{cl}(z)$ – вхідний сигнал структури, зображеної на рис. 3.

Аналогічні співвідношення можна записати для кожного елемента структури (рис. 3). Отже,

$$y_1(z) = V_1(z)u_{cl}(z),$$

$$y_3(z) = 2u_{cl}(z) \sum_{i=1}^{(n-n_r)/2} \frac{\eta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \cdot \frac{\left(a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} + (1 - 2\varphi_{i,1})\pi_i \right) z^{-1} + \left(\theta_{1,i}^2 \pi_i - a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} - a_{1,i} \right) z^{-2}}{1 - 2\varphi_{i,1} z^{-1} + \theta_{1,i}^2 z^{-2}}. \quad (31)$$

Оскільки на вході кожної передавальної функції $w_j(z)$ і $w_i(z)$ (рис. 3) діє сигнал $u_{cl}(z)$, то на виході отримуємо реакцію

$$y_i(z) = \frac{\eta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \cdot \frac{\left(a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} + (1 - 2\varphi_{i,1})\pi_i \right) z^{-1} + \left(\theta_{1,i}^2 \pi_i - a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} - a_{1,i} \right) z^{-2}}{1 - 2\varphi_{i,1} z^{-1} + \theta_{1,i}^2 z^{-2}} u_{cl}(z), \quad i = \overline{1, (n-n_r)/2}. \quad (33)$$

Для цифрових систем керування є справедливим принцип суперпозиції [10]. Тому мають місце такі співвідношення (рис. 3):

$$y_2(z) = u_{cl}(z) \sum_{j=1}^{n_r} V_j^{(2)}(z),$$

$$y_3(z) = u_{cl}(z) \sum_{i=n_r+1}^{(n+n_r)/2} V_i^{(3)}(z).$$

Якщо врахувати значення $V_1(z)$, $V_k^{(2)}(z)$ і $V_i^{(3)}(z)$, то отримуємо:

$$y_1(z) = r_0 u_{cl}(z), \quad (29)$$

$$y_2(z) = u_{cl}(z) \sum_{j=1}^{n_r} \frac{r_j}{\sigma_j} \frac{(1 - \theta_j) z^{-1}}{1 - \theta_j z^{-1}}, \quad (30)$$

$y_j(z)$ і $y_i(z)$ відповідного елемента. Тому можемо записати

$$y_j(z) = \frac{r_j}{\sigma_j} \cdot \frac{(1 - \theta_j) z^{-1}}{1 - \theta_j z^{-1}} u_{cl}(z), \quad j = \overline{1, n_r}, \quad (32)$$

$$y_2(z) = \sum_{j=1}^{n_r} y_j(z), \quad (34)$$

$$y_3(z) = \sum_{i=1}^{(n-n_r)/2} y_i(z). \quad (35)$$

Для співвідношення (33) введемо такі позначення:

$$K_{\eta,i} = \frac{\eta_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2},$$

$$b_{1,i} = a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} + a_{1,i} + (1 - 2\varphi_{i,1})\pi_i,$$

$$b_{2,i} = \theta_{1,i}^2 \pi_i - a_{2,i} \frac{\mu_i}{\eta_i} - a_{1,i}.$$

Тоді (33) набуде такого вигляду:

$$y_i(z) = K_{\eta,i} \cdot \frac{b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 - 2\varphi_{i,1}z^{-1} + \theta_{1,i}^2z^{-2}} u_{cl}(z), \quad i = \overline{1, (n-n_r)/2}. \quad (36)$$

Формулу (35) подамо у такому вигляді:

$$(1 - 2\varphi_{i,1}z^{-1} + \theta_{1,i}^2z^{-2})y_i(z) = K_{\eta,i}(b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2})u_{cl}(z) \quad (37)$$

Подібний вираз запишемо і для формули (32)

$$\sigma_j(1 - \theta_jz^{-1})y_j(z) = r_j(1 - \theta_j)z^{-1}u_{cl}(z). \quad (38)$$

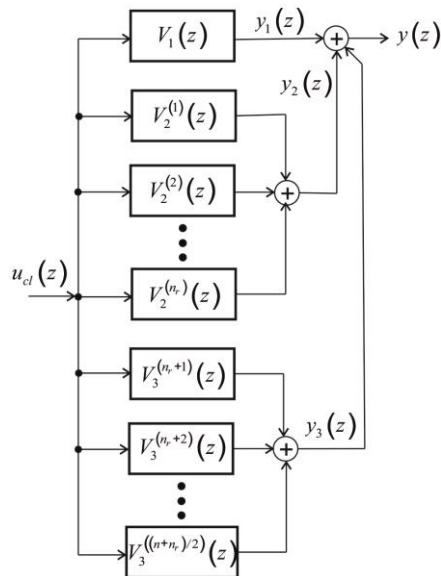


Рисунок 3 – Структурна схема передавальної функції $w(z)$

Якщо прийняти до уваги теорему про зсув за часом вправо [9, 11], то рівняння (37) і (38) трансформуються у такі вирази:

$$\sigma_j y_j(kt_0) - \sigma_j \theta_j y_j((k-1)t_0) = r_j(1 - \theta_j)u_{cl}((k-1)t_0), \quad j = \overline{1, n_r}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (39)$$

$$y_i(kt_0) - 2\varphi_{i,1}y_i((k-1)t_0) + \theta_{1,i}^2 y_i((k-2)t_0) = K_{\eta,i}(b_{1,i}u_{cl}((k-1)t_0) + b_{2,i}u_{cl}((k-2)t_0)), \quad i = \overline{1, (n-n_r)/2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (40)$$

Початкові умови для рівнянь (39) і (40) будуть такими:

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, n_r},$$

$$y_i(0) = 0, \quad y_i(t_0) = 0.$$

Рівняння (39) і (40) дають змогу отримати рекурентну процедуру для обчислення ординат функцій $y_j(kt_0)$ і $y_i(kt_0)$ в дискретні моменти часу kt_0 , $k = 0, 1, 2, \dots$. Для отримання такої процедури, рівняння (39) і (40) розв'яжемо відносно функцій $y_j(kt_0)$ і $y_i(kt_0)$, тобто

$$y_j(kt_0) = \frac{r_j}{\sigma_j}(1 - \theta_j)u_{cl}((k-1)t_0) + \theta_j y_j((k-1)t_0), \quad j = \overline{1, n_r}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (41)$$

$$y_i(kt_0) = K_{\eta,i}(b_{1,i}u_{cl}((k-1)t_0) + b_{2,i}u_{cl}((k-2)t_0)) + 2\varphi_{i,1}y_i((k-1)t_0) - \theta_{1,i}^2 y_i((k-2)t_0), \quad i = \overline{1, (n-n_r)/2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (42)$$

Таким чином, сигнал на виході структури (рис. 3) буде таким:

$$y(kt_0) = y_1(kt_0) + \sum_{j=1}^{n_r} y_j(kt_0) + 2 \sum_{i=1}^{(n-n_r)/2} y_i(kt_0), \quad (43)$$

де $y_j(kt_0)$ і $y_i(kt_0)$ обчислюють за допомогою рекурентних процедур (36) і (37).

Реалізацію рекурентних процедур (39) і (40) розглянемо на прикладі передавальної функції $w_{12}(s) \cdot (t_0 = 10c)$.

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, обчислені значення ординат $y_j(kt_0)$ і $y_i(kt_0)$ в дискретні моменти часу kt_0 , $k = 0, 1, 2, \dots$ з використанням рекурентних процедур (41) і (42) при одиничному стрибкоподібному значенні $u_{cl}(kt_0)$. Значення $y(kt_0)$, яке відповідає дискретній передавальній функції $w_{11}(z)$, обчислені за формулою (43) (рис. 4).

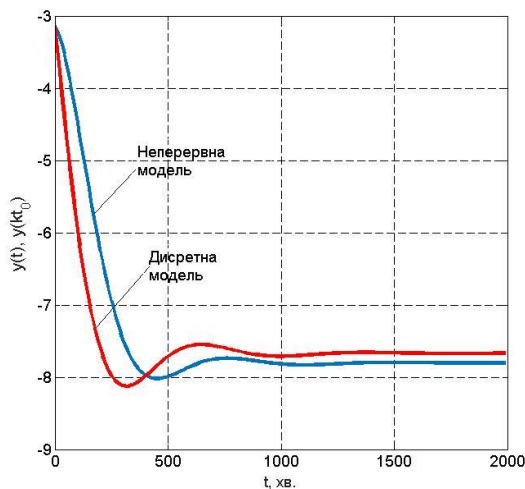


Рисунок 4 – Графіки залежностей $y(t)$ і $y(kt_0)$, побудовані для передавальної функції

$w_{11}(s)$ компенсатора

На рис. 4 також зображений графік залежності $y(t) = L^{-1}\left[\frac{w_{11}(s)}{s}\right]$, який отриманий

як зворотне перетворення Лапласа від функції $Y(s) = w_{11}(s)U_{cl}(s)$, де $U_{cl}(s) = \frac{1}{s}$.

$$a_{0,i} \frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} + a_{1,i} \frac{dy_{3,i}(t)}{dt} + a_{2,i} y_{3,i}(t) = b_{i,0} \frac{du_{cl}(t)}{dt} + b_{i,1} u_{cl}(t). \quad (45)$$

Будемо обчислювати наближено першу і другу похідні. Маємо

$$\frac{dy_{3,i}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0} (y_{3,i}(t) - y_{3,i}(t-t_0)). \quad (46)$$

За визначенням другої похідної

$$\frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_{3,i}(t)}{dt} \right).$$

Якщо врахувати (4.44), то

$$\frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{t_0} \left(\frac{dy_{3,i}(t)}{dt} - \frac{dy_{3,i}(t-t_0)}{dt} \right).$$

Наближене значення $\frac{dy_{3,i}(t)}{dt}$ знаходиться

за формулою (46), а для обчислення $\frac{dy_{3,i}(t-t_0)}{dt}$ у виразу (46) t слід замінити на t_0 .

У результаті отримаємо

Аналіз отриманих результатів показує, що функції $y(t)$ і $y(kt_0)$ не співпадають в точках kt_0 . Для виявлення природи такої розбіжності розглянемо передавальну функцію

$$V_i^{(3)}(s) = \frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i}.$$

Оскільки $r_i = \mu_i \pm j\eta_i$, то

$$V_i^{(3)}(s) = \frac{r_i}{s + \alpha_i \mp j\beta_i} = 2\eta_i \frac{s + \pi_i}{(s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2}.$$

Передавальну функцію подамо у такому вигляді:

$$V_i^{(3)}(s) = \frac{b_{i,0}s + b_{i,1}}{a_{0,i}s^2 + a_{1,i}s + a_{2,i}}, \quad (44)$$

де $b_{i,0} = 2\eta_i$; $b_{i,1} = 2\eta_i\pi_i$; $a_{0,i} = 1$; $a_{1,i} = 2\alpha_i$; $a_{2,i} = \alpha_i^2 + \beta_i^2$.

Перейдемо від передавальної функції (44) до диференціального рівняння (при нульових початкових умовах). Отже,

$$\frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{t_0^2} (y_{3,i}(t) - 2y_{3,i}(t-t_0) + y_{3,i}(t-2t_0)).$$

За аналогією (45) маємо

$$\frac{du_{cl}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0} (u_{cl}(t) - u_{cl}(t-t_0)).$$

При переході до дискретного часу $t = kt_0$ отримаємо такі співвідношення:

$$\frac{dy_{3,i}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0} (y_{3,i}(kt_0) - y_{3,i}((k-1)t_0)), \quad (47)$$

$$\frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{t_0^2} (y_{3,i}(kt_0) - 2y_{3,i}((k-1)t_0) + y_{3,i}((k-2)t_0)), \quad (48)$$

$$\frac{du_{cl}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0} (u_{cl}(kt_0) - u_{cl}((k-1)t_0)). \quad (49)$$

Нехай E оператор зміщення вліво [13]. Тоді $y((k-1)t_0) = Ey(kt_0)$, $y((k-2)t_0) = E^2y(kt_0)$ і

$u_{cl}((k-1)t_0) = E_r u_{cl}(kt_0)$. Застосуємо оператор зміщення вліво E (E_r) до виразів (46) – (18). У результаті отримаємо

$$\frac{dy_{3,i}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0}(1-E)y_{3,i}(kt_0), \quad (50)$$

$$\left(\frac{a_{0,i}}{t_0^2}(1-E)^2 + \frac{a_{1,i}}{t_0}(1-E) + a_{2,i} \right) y_{3,i}(kt_0) = \left(\frac{b_{i,0}}{t_0}(1-E_r) + b_{i,1} \right) u_{cl}(kt_0). \quad (53)$$

При стрибкоподібній вхідній величині $u_{cl}((k-j_1)t_0) = 1(kt_0)$, $j_1 = 0, 1$
 $u_{cl}(kt_0) = u_{cl}((k-1)t_0)$, $\forall k$. Із (4.48) випливає, що $u_{cl}(kt_0) - u_{cl}((k-1)t_0) = 0$ і відповідно $(1-E_r)u_{cl}(kt_0) = 0$, тобто $E_r = 1$, $\forall k$.

Отже, при постійному значенні $u_{cl}(kt_0)$, всі значення $(1-E_r)u_{cl}(kt_0)$, в рівнянні (53) набудуть нульових значень.

Таким чином, наявність у правій рівняння (40) лівого зсуву, який визначається оператором E_r , при використанні рекурентного співвідношення (42) для обчислення ординат функції $y_i(kt_0)$ за умови, що $u_{cl}(kt_0) = 1(kt_0)$, приводить до втрати частини інформації. Як і раніше, у подальших викладках будемо опускаєти індекси, які ідентифікують канали передачі сигналів. Отже, передавальній функції $w(s)$ поставимо у відповідність диференціальне рівняння n -го порядку

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

яке замінимо еквівалентною системою диференціальних рівнянь першого порядку [13], тобто

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= x_{i+1}(t) + \beta_i u(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n a_{j-1} x_j(t) + \beta_n u(t), \quad (54) \\ y(t) &= x_1(t) + \beta_0 u(t). \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 y_{3,i}(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{t_0^2} (1-E)^2 y_{3,i}(kt_0), \quad (51)$$

$$\frac{du_{cl}(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_0} (1-E_r) u_{cl}(kt_0). \quad (52)$$

Після підстановки (50) – (52) в (45), будемо мати

Система рівнянь (54) вміщує невідомі коефіцієнти β_i , $i = \overline{0, n}$, які знаходять як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=i}^n a_j \beta_{j-i} = b_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (55)$$

Для компактного запису системи рівнянь (31) використаємо матрично-векторну форму. Тоді

$$A_p \bar{\beta} = \bar{b}, \quad (56)$$

де $A_p = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що матриця A_p є квадратною матрицею розміром $n \times n$. Тому із рівняння (54) визначимо

$$\bar{\beta} = A_p^{-1} \bar{b}.$$

У матрично-векторній формі система рівнянь (54) буде такою:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= A\bar{x}(t) + \bar{\beta}_r u(t), \quad (57) \\ y(t) &= \bar{c}^T \bar{x}(t) + \beta_0 u(t), \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \bar{\beta}_r = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо використати оператор зсуву назад, то

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \frac{\bar{x}(kt_0) - \bar{x}((k-1)t_0)}{t_0}. \quad (58)$$

Наближення (56) дає змогу рівняння (55) записати у такому вигляді:

$$\frac{\bar{x}(kt_0) - \bar{x}((k-1)t_0)}{t_0} = A\bar{x}((k-1)t_0) + \bar{\beta}_r u((k-1)t_0), \quad (59)$$

$$y(kt_0) = x_1(kt_0) + \beta_0 u(kt_0). \quad (60)$$

Співвідношення (59) і (60) дають змогу отримати рекурентну процедуру обчислення ординат різницевого рівняння

$$\bar{x}(kt_0) = \bar{x}((k-1)t_0) + t_0 (A\bar{x}((k-1)t_0) + \bar{\beta}_r u((k-1)t_0)) \quad (61)$$

$$y(kt_0) = x_1(kt_0) + \beta_0 u(kt_0), \quad (62)$$

де $\bar{x}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Співвідношення (61) і (62) утворюють ітераційний процес, за допомогою якого можна обчислити ординати вихідної величини

компенсатора за відповідним каналом передачі сигналу.

Слід відмітити, що точність обчислення ординат функції $y(kt_0)$ залежить від кроку дискретності t_0 , який повинен бути значно меншим від ніж тривалість перехідного процесу.

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, за формулами (61) і (62) були обчислені значення ординат компенсатора за кожним каналом передачі сигналів при одиничних вхідних величинах. Крок дискретності був таким: $t_0 = 0,5$ с. Крім того обчислені значення $y_{c1}(t)$ і $y_{c2}(t)$ за формулами (2) і (3). Результат таких обчислень ілюструє рис. 5.

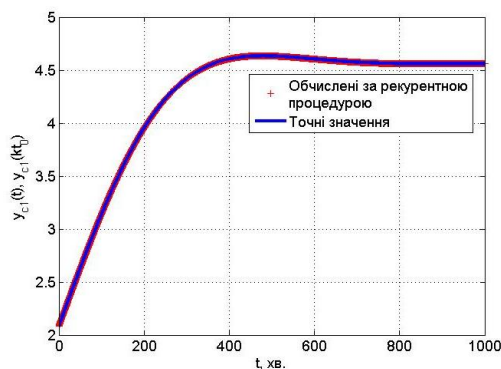
Для оцінки похибки дискретизації за рекурентними співвідношеннями (61) і (62) обчислювались максимальні різниці між величинами $y_{c1}(t)$ і $y_{c1}(kt_0)$ та $y_{c2}(t)$ і $y_{c2}(kt_0)$ за такими формулами:

$$Er_i = \max |y_{ci}(t) - y_{ci}(kt_0)|, \quad i = 1, 2. \quad (63)$$

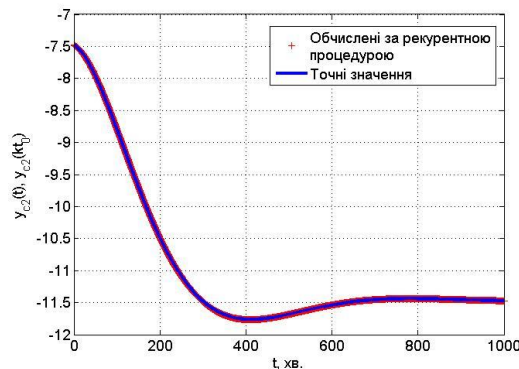
У результаті обчислень за формулами (63) отримали такі результати:

Максимальна похибка по каналу ус1
 $Er1 = 3.7201e-03$

Максимальна похибка по каналу ус2
 $Er2 = 6.6569e-03$



а)



б)

Рисунок 5 – Порівняння точних і дискретних значень вихідних величин компенсатора

Слід зазначити, що похибки Er_i , $i = 1, 2$ залежать від кроку дискретності t_0 : зі збільшення значення t_0 збільшуються і похибки Er_i дискретизації. Як показує аналіз отриманих результатів похибка дискретизації залежить не тільки від значення t_0 , але й від характеру зміни залежностей $y_{c1}(t)$ і $y_{c2}(t)$. Чим ближче такі залежності до аперіодичного процесу, тим менша похибка дискретизації. З рис. 5 видно, що $y_{c1}(t)$ (рис. 5,а) має значно менше виражений коливний характер ніж залежність $y_{c2}(t)$ (рис. 5,б). Тому $Er_2/Er_1 = 1,79$.

Висновки. 1. Для синтезованого компенсатора перехресних зв'язків обчислені параметри матричної передавальної функції компенсатора. Показано, що для багатовимірного об'єкта керування, у якого порядок чисельника на одиницю менший від знаменника передавальна функція відповідного каналу «вхід-вихід», передавальні функції компенсатора мають порядок $2(3n-1)$.

2. Методом декомпозиції передавальної функції високого порядку отримана структурна схема, яка вміщує елементи, які визначеним способом з'єднані між собою. Кожний із елементів структури має нижчий порядок ніж початкова передавальна функція, що дає змогу реалізувати компенсатор перехресних зв'язків за допомогою контролерів.

3. Визначені похибки апроксимації при переході від неперервної передавальної функції до дискретного її аналогу. Встановлено, що похибка апроксимації залежить від характеру перехідного процесу. Чим ближче перехідний процес за своїми властивостями до аперіодичного, тим менша похибка апроксимації.

Список використаних джерел

1. Горбійчук М. І., Лазорів Н. Т., Лазорів А. М. Автономна система автоматичного керування температурним режимом муфельної печі. Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості: матеріали наук.-практ. конф., (м. Івано-Франківськ, 13 жовт., 2022). Івано-Франківськ, 2022. С. 42 – 44.

URL:

<https://drive.google.com/file/d/1WqQ2msGllAbwQ4WsE-Yruxd1keUxCTad/view>. (дата звернення: 19.11.2022).

2. Штіфзон О. Й., Новіков В. П., Бунь В. П. Теорія автоматичного управління: навчальний посібник. К.: КПІ ім. І. Сікорського. 2020. 144 с.

3. Levin J. J. On the matrix Riccati equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10. 1959. Pp. 519–524.

4. Ray W. *Advanced Process Control*. New York: McGraw-Hill Book, Company, 1981. 368 p

5. Kuster George E. H-infinity Norm Calculation via a State Space Formulation. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/49544/Kuster_GE_T_2013.pdf?isAllowed=y&sequence=1 (Дата звернення 26.09.2022)

6. Gaiduk A.R. Synthesis of control systems of multivariable objects. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 1998. Vol. 37, № 1. P. 5–13.

7. Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A. A method of synthesis of a multivariable system with decoupled and interconnected channels // *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Houston, TX, 2003. Pp. 548–552.

8. Gorbiychuk M. I., Povarchuk D. D., Humeniuk T. V., Lazoriv N. T. Development of the imitation model of the two-stage separation process of oil. *Earsten-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № ½ (92). P. 20 – 27.

9. Isermann R. *Digital Control Systems*. Berlin: Springer-Vtrlag, 1980. 541 p.

10. Goodwin G. C., Graebe S. F., Saldago M. E. *Control Systems Design*. Prentice Hall, 2000. 944 p.

11. Tou Julius T. *Digital and Sampled-data Control Systems*. New York: McGraw-Hill Book Company, INC, 1960. 694 p.

12. Горбійчук М. І., Лазорів Н. Т. Дискретизація математичних моделей лінійних об'єктів керування. *Journal Věda a perspektivy* 2022. № 1. P. 241-254.

13. Горбійчук М. І., Пістун Є. П. Числові методи і моделювання на ЕОМ: навч. посібник. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010. 409 с.

References

1. Horbiychuk M. I., Lazoriv N. T., Lazoriv A. M. Avtonomna systema avtomatychnoho keruvannya temperaturnym rezhymom mufel'noyi pechi. Informatsiyi tekhnolohiyi v osviti, tekhnitsi

ta promyslovosti: materialy nauk.-prakt. konf., (m. Ivano-Frankivs'k, 13 zhovt., 2022.) Ivano-Frankivs'k, 2022. S. 42 – 44.

URL:

<https://drive.google.com/file/d/1WqQ2msGIIAbwQ4WsE-Yruxd1keUxCTad/view>. [in Ukrainian]

2. Shtifzon O. Y., Novikov V. P., Bun' V. P. Teoriya avtomatychnoho upravlinnya: navchal'nyy posibnyk. K.: KPI im. I. Sikors'koho. 2020. 144 s. [in Ukrainian]

3. Levin J. J. On the matrix Riccati equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10. 1959. Pp. 519–524.

4. Ray W. Advanced Process Control. New York: McGraw-Hill Book, Company, 1981. 368 p

5. Kuster George E. H-infinity Norm Calculation via a State Space Formulation. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/49544/Kuster_GE_T_2013.pdf?isAllowed=y&sequence=1 (Дата звернення 26.09.2022)

6. Gaiduk A.R. Synthesis of control systems of multivariable objects. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 1998. Vol. 37, N 1. P. 5–13.

7. Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A. A method of synthesis of a multivariable system with decoupled and interconnected channels // Proceedings of the 2003 IEEE International

Symposium on Intelligent Control. Houston, TX, 2003. P. 548–552.

8. Gorbiychuk M. I., Povarchuk D. D., Humeniuk T. V., Lazoriv N. T. Development of the imitation model of the two-stage separation process of oil. *Earsten-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. -№ ½ (92). P. 20 – 27. [in Ukrainian]

9. Isermann R. Digital Control Systems. Berlin: Springer-Vtrlag, 1980. 541 p.

10. Goodwin G. C., Graebe S. F., Saldago M. E. Control Systems Design. Prentice Hall, 2000. 944 p.

11. Tou Julius T. Digital and Sampled-data Control Systems. New York: McGraw-Hill Book Company, INC, 1960. 694 p.

12. Horbiychuk M. I., Lazoriv N. T. Dyskretyzatsiya matematychnykh modeley liniynykh ob'ektiv keruvannya. *Journal Věda a perspektivy*. 2022. № 1: P. 241-254. [in Ukrainian]

13. Horbiychuk M. I., Pistun YE. P. Chyslovi metody i modelyuvannya na EOM: navch. posibnyk. Ivano-Frankivs'k: IFNTUNH, 2010. 409 s. [in Ukrainian]