ISSN 1993-9981 print *Методи та прилади контролю якості* 89
ISSN 2415-3575 online *№ 1 (52) 2024*

УДК 517.98

DOI 10.31471/1993-9981-2024-1(52)-89-93

СЛАБКОСИМЕТРИЧНІ ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ НА ПРОСТОРІ АБСОЛЮТНО СУМОВНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Т. В. Василишин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна; e-mail: taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua

Роботу присвячено вивченню слабкосиметричних неперервних лінійних функціоналів на комплексному банаховому просторі ℓ_1 всіх абсолютно сумовних послідовностей комплексних чисел. У загальному випадку, функцію на векторному просторі називають симетричною відносно деякої фіксованої групи операторів на цьому просторі, якщо дана функція є інваріантною відносно дії на її аргумент елементів групи. Функцію на векторному просторі називають слабко симетричною відносно деякої фіксованої спадної за включенням послідовності груп операторів на цьому просторі, якщо ця функція є симетричною відносно принаймні однієї з груп, що належать до послідовності. Простори симетричних неперервних поліномів і, зокрема, простори симетричних неперервних лінійних функціоналів на банахових просторах є повними відносно норми рівномірної збіжності на замкнутій одиничній кулі, яка є однією з найчастіше використовуваних норм на цих просторах. На відміну від цього випадку, простори слабко симетричних неперервних поліномів на банахових просторах відносно згаданої вище норми не обов'язково є повними. Отже, поповнення цих просторів можуть містити функції, які не задовольняють жодним умовам симетрії. Відповідно, такі функції можна апроксимувати слабкосиметричними функціями, кожна з яких за визначенням є симетричною відносно однієї з вищезгаданих груп. Це дозволяє застосовувати до просторів, загалом, несиметричних функцій методику, розроблену для просторів симетричних функцій. У цій роботі побудовано послідовність груп симетрій на просторі ℓ_1. Отримано структуру слабкосиметричних відносно цієї послідовності неперервних лінійних функціоналів на даному просторі. Знайдено поповнення простору всіх таких функціоналів і описано деякі властивості даного поповнення..

Ключові слова: симетричний функціонал, слабко симетричний функціонал, банахів простір абсолютно сумовних послідовностей.

The work is devoted to the study of weakly symmetric continuous linear functionals on the complex Banach space ℓ_1 of all absolutely summing complex sequences. In general, a function on a vector space is called symmetric with respect to some fixed group of operators on this space if the function is invariant under the action on its argument of elements of the group. A function on a vector space is called weakly symmetric with respect to some fixed descending by inclusion sequence of groups of operators on this space if this function is symmetric with respect to at least one of the groups that belong to the sequence. Spaces of symmetric continuous polynomials and, in particular, spaces of symmetric continuous linear functionals, on Banach spaces are complete with respect to the norm of the uniform convergence on the closed unit ball, which is one of the most commonly used norms on these spaces. In contrast, spaces of weakly symmetric continuous polynomials on Banach spaces with respect to the above-mentioned norm are not necessarily complete. Therefore, completions of these spaces can contain functions that do not satisfy any conditions of symmetry. Consequently, such functions can be approximated by weakly symmetric functions each of which, by the definition, is symmetric with respect to one of the above-mentioned groups. This fact makes it possible to apply to spaces of, in general, non-symmetric functions the technique developed for spaces of symmetric functions. In this work, we construct the sequence of groups of symmetries on the space ℓ_1. We obtain the structure of weakly symmetric, with respect to this sequence, continuous linear functionals on this space. Also, we find the completion of the space of all such functionals. Some properties of the completion are established.

Keywords: symmetric functional, weakly symmetric functional, Banach space of absolutely summing sequences.

Вступ

Симетричні поліноми на нескінченно-вимірних просторах вперше було розглянуто в роботі [5], де, зокрема, було побудовано алгебраїчні базиси алгебр неперервних симетричних поліномів на банахових просторах сумовних послідовностей. Результати цієї роботи було узагальнено в роботі [4] на банахові простори із симетричним базисом.

Спектри алгебр цілих симетричних функцій почали досліджуватися в роботі [1]. Повний опис спектра алгебри Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі абсолютно сумовних функцій отримано в роботі [3]. Найбільш загальний підхід до вивчення симетричних функцій на банахових просторах отримано в роботі [2], згідно із яким фіксують певну групу операторів на банаховому просторі й симетричними відносно цієї групи вважають функції на просторі, що є інваріантними відносно дії елементів групи на їхній аргумент. В роботі [6] використано цей підхід і побудовано групи операторів на банахових просторах абсолютно сумовних послідовностей, які є слабшими від класичної групи перестановок базисних елементів. Алгебри неперервних симетричних відносно цих груп поліномів мають ряд властивостей, аналогічних до властивостей алгебр симетричних у класичному сенсі поліномів. Зокрема, мають зліченні алгебраїчні базиси. Крім того, із цих груп можна формувати впорядковані за включенням зліченні ланцюги. Це дозволяє будувати індуктивні границі відповідних алгебр симетричних поліномів і цілих симетричних функцій. Найпростішим нетривіальним випадком полінома на банаховому просторі є лінійний функціонал. У даній роботі розглянуто лінійні неперервні симетричні відносно згаданих вище груп функціонали на комплексному банаховому просторі абсолютно сумовних послідовностей, введено поняття слабко симетричної функції та описано замикання множини всіх слабко симетричних неперервних лінійних функціоналів на цьому просторі.

Висвітлення основного матеріалу статті

Нехай $\ell_{1_{\mathrm{T}}}$ це банахів простір всіх абсолютно сумовних послідовностей комплексних чисел із нормою

$$\|x\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$.

Нехай

$$e_m = (\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},1,0,\ldots)$$

для $m \in \mathbb{N}$.

Відомо, що множина $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ є базисом Шаудера простору ℓ_1. Також відомо, що відображення

$$f \in \ell_1^* \mapsto \big(f(e_1), f(e_2),\ldots\big) \in \ell_\infty$$

є ізометричним ізоморфізмом, де ℓ_1^* є банаховим простором всіх лінійних неперервних функціоналів на просторі ℓ_1 і ℓ_∞ є банаховим простором всіх обмежених послідовностей комплексних чисел із нормою

$$\|x\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m|,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$.

Для кожних $f \in \ell_1^*$та $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$, за неперервністю і лінійністю функціонала f ,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m f(e_m).$$

Нехай G є довільною фіксованою групою операторів на просторі ℓ_1. Функцію $f:\ell_1 \to \mathbb{C}$ називають G-симетричною, якщо $f(g(x)) = f(x)$ для всіх $x \in \ell_1$ і $g \in G.$ Найбільш вживаними є групи операторів, які переставляють елементи базису простору ℓ_1. Розглянемо загальний метод побудови таких груп. Нехай B є довільною групою бієкцій на множині $\mathbb{N}$. Для $b \in B$ визначимо оператор $g_b : \ell_1 \to \ell_1$ формулою

$$g_b((x_1, x_2,\ldots)) = (x_{b(1)}, x_{b(2)},\ldots).$$

Нехай

$$G_B = \{g_b : b \in B\}.$$

Розглянемо конкретну реалізацію груп B та G_B.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. с $\varkappa_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{1,\ldots,n\}$ наступним чином. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Тоді існують єдині $j \in \mathbb{N}$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$ такі, що $m = (j-1)n + s.$ Покладемо

$$\varkappa_n(m) = (j, s).$$

Нехай $\mathcal{S}$ це група всіх бієкцій на множині $\mathbb{N}$. Нехай $\mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$ є тотожним відображенням на множині $\{1, \ldots, n\}$. Для $\sigma \in \mathcal{S}$ нехай $\sigma \times \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$ є бієкцією, яка діє на множині $\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$ і визначена формулою

$$\left(\sigma \times \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}\right)((j, s)) = (\sigma(j), s),$$

де $(j, s) \in \mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$. Для $\sigma \in \mathcal{S}$ визначимо бієкцію $\theta_{\sigma,n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ формулою

$$\theta_{\sigma,n} = \varkappa_n^{-1} \circ \left(\sigma \times \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}\right) \circ \varkappa_n,$$

Нехай

$$\Theta_n = \{\theta_{\sigma,n} : \sigma \in \mathcal{S}\}.$$

Зауважимо, що множина Θ_n є підгрупою групи $\mathcal{S}$. Згідно із [1, теорема 4 і лема 7], кожен лінійний неперервний G_{Θ_n}-симетричний функціонал f на просторі ℓ_1 можна єдиним чином зобразити у вигляді лінійної комбінації функціоналів

$$f_s((x_1, x_2, \ldots)) = x_s + x_{n+s} + x_{2n+s} + \ldots,$$

де $s \in \{1, \ldots, n\}$.

Оскільки кожному функціоналу f_s відповідає періодична з періодом n послідовність у просторі ℓ_∞, то і довільній лінійній комбінації таких функціоналів відповідає періодична з періодом n послідовність у просторі ℓ_∞. Навпаки теж правильно. Тому можна ототожнити множину всіх таких послідовностей із множиною всіх лінійних неперервних G_{Θ_n}-симетричних функціоналів на просторі ℓ_1.

Розглянемо методику наближення, у загальному випадку, несиметричних функцій симетричними функціями відносно різних груп симетрії. Функцію $f : \ell_1 \to \mathbb{C}$ назвемо слабко симетричною, якщо існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що ця функція є $G_{\Theta_{2^n}}$-симетричною. Зауважимо, що у ролі степенів числа 2 можна використати степені довільного натурального числа, більшого від 1. На відміну від просторів симетричних функцій, простори слабко симетричних функцій, у загальному випадку, не є замкненими. Це означає, що у замиканнях таких просторів можуть міститися функції, для яких не виконуються жодні умови симетрії. Відповідно, ці функції можуть бути наближеними слабко симетричними функціями. Розглянемо слабко симетричні лінійні неперервні функціонали на просторі ℓ_1. Згідно із зауваженням вище стосовно структури лінійних неперервних G_{Θ_n}-симетричних функціоналів на просторі ℓ_1, простір слабко симетричних лінійних неперервних функціоналів на цьому просторі можна ототожнити із підпростором простору ℓ_∞, який складається зі всіх періодичних послідовностей, періодами яких є степені числа 2. Побудуємо множину, яка є замиканням даного простору і доведемо деякі її властивості.

Нехай Y це множина всіх послідовностей $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_\infty$, які мають наступну властивість: для кожного $\varepsilon > 0$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$|y_j - y_{j+k2^n}| < \varepsilon$$

для кожних $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ і $k \in \mathbb{N}$.

Лема 1. Для кожних $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, сума $y^{(1)} + y^{(2)}$ належить множині Y.

Доведення. Нехай $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$. Нехай $y = y^{(1)} + y^{(2)}$. Покажемо, що $y \in Y$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, то існують числа $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\left| y_j^{(s)} - y_{j+k2^{n_s}}^{(s)} \right| < \varepsilon / 2$$

для кожних $s \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{n_s}\}$ і $k \in \mathbb{N}$.

Нехай $n = \max\{n_1, n_2\}$. Покажемо, що $|y_j - y_{j+k2^n}| < \varepsilon$ для кожних $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ і $k \in \mathbb{N}$. Нехай $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ і $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$j+k2^n = j+k2^{n-n_s}2^{n_s} = j+k_s 2^{n_s},$$

де $k_s = k2^{n-n_s}$ для $s\in\{1,2\}$. Як наслідок,

$$\left| y_j^{(s)} - y_{j+k2^n}^{(s)} \right| = \left| y_j^{(s)} - y_{j+k_s 2^{n_s}}^{(s)} \right| < \varepsilon/2$$

для кожного $s\in\{1,2\}$. Тому

$$| y_j - y_{j+k2^n} | = \left| y_j^{(1)} + y_j^{(2)} - y_{j+k2^n}^{(1)} - y_{j+k2^n}^{(2)} \right| =$$
$$= \left| y_j^{(1)} - y_{j+k2^n}^{(1)} + y_j^{(2)} - y_{j+k2^n}^{(2)} \right| \le$$
$$\le \left| y_j^{(1)} - y_{j+k2^n}^{(1)} \right| + \left| y_j^{(2)} - y_{j+k2^n}^{(2)} \right| <$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отже, $y\in Y$. Доведено.

Лема 2. Для кожних $\lambda\in\mathbb{C}$ і $y\in Y$, елемент λy належить множині Y.

Доведення. Якщо $\lambda = 0$, то $\lambda y = (0,0,\ldots)$ і, як наслідок, $\lambda y\in Y$. Розглянемо випадок $\lambda\ne 0$. Нехай $z=\lambda y$. Покажемо, що $z\in Y$. Нехай $\varepsilon>0$. Оскільки $y\in Y$, то існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що

$$| y_j - y_{j+k2^n} | < \varepsilon / |\lambda|$$

для кожних $j\in\{1,\ldots,2^{n_s}\}$ і $k\in\mathbb{N}$. Як наслідок,

$$| z_j - z_{j+k2^n} | = | \lambda y_j - \lambda y_{j+k2^n} | =$$
$$= |\lambda| \, | y_j - y_{j+k2^n} | < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

для кожних $j\in\{1,\ldots,2^{n_s}\}$ і $k\in\mathbb{N}$. Отже, $z\in Y$. Доведено.

Із лем 1 і 2 випливає наступний результат.

Твердження 1. Множина Y є лінійним підпростором простору ℓ_∞.

Покажемо, що підпростір Y є замкненим в просторі ℓ_∞.

Теорема 1. Простір Y є замкненим підпростором простору ℓ_∞.

Доведення. Покажемо, що множина Y містить кожну свою точку дотику. Нехай $x\in\ell_\infty$ є точкою дотику для Y. Покажемо, що $x\in Y$. Нехай $\varepsilon>0$. Оскільки x є точкою дотику множини Y, то існує точка $y\in Y$ така, що

$$\|x-y\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Оскільки $y\in Y$, то існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що

$$| y_j - y_{j+k2^n} | < \varepsilon/3$$

для кожних $j\in\{1,\ldots,2^n\}$ і $k\in\mathbb{N}$. Тоді

$$| x_j - x_{j+k2^n} | = | x_j - y_j + y_j - y_{j+k2^n} + y_{j+k2^n} -$$
$$- x_{j+k2^n} | \le | x_j - y_j | + | y_j - y_{j+k2^n} | + | y_{j+k2^n} -$$
$$- x_{j+k2^n} | < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

для кожних $j\in\{1,\ldots,2^n\}$ і $k\in\mathbb{N}$. Отже, $x\in Y$. Доведено.

Таким чином, простір Y є банаховим простором. Можна переконатися, що простір, який складається зі всіх періодичних послідовностей, періодами яких є степені числа 2, є скрізь щільним у просторі Y. Отже, простір Y є поповненням простору всіх слабко симетричних лінійних неперервних функціоналів на просторі ℓ_1.

Висновки

1. Введено поняття слабко симетричного лінійного функціонала на просторі ℓ_1.

2. Побудовано підпростір простору ℓ_∞, який є замиканням простору слабко симетричних лінійних функціоналів на просторі ℓ_1.

Список використаних джерел / References

1. Alencar R., Aron R.,Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p. Bull. *Lond. Math. Soc.* 2003. 35(2), pp. 55-64. DOI: 10.1112/S0024609302001431

2. Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space. Bull. *Lond. Math. Soc*. 2016. 48(5), pp. 779-796. DOI: 10.1112/blms/bdw043

3. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. On the spectrum of the algebra of bounded-type symmetric analytic functions on ℓ_1. *Math. Nachr*. 2024. 297 (10), pp. 3835–3846. DOI: 10.1002/mana. 202300415

4. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces. *J. Lond. Math. Soc*. 1999. 59(2), pp. 681-697. DOI: 10.1112/S0024610799007164

5. Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space. *Mat. USSR Sbornik* 1973. 21(2), pp. 255-277. DOI: 10.1070/ SM1973v021n02ABEH002016

6. Vasylyshyn T. Isomorphisms of algebras of symmetric functions on ℓ_p. *Mat. Stud*. (in print).

WEAKLY SYMMETRIC LINEAR CONTINUOUS FUNCTIONALS ON THE SPACE OF ABSOLUTELY SUMMABLE SEQUENCES

T. V. Vasylyshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka St., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine,
e-mail: *taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua*