УДК 517.982

DOI 10.31471/1993-9981-2024-1(52)-94-97

АПРОКСИМАЦІЯ ВУЗЬКИХ ОПЕРАТОРІВ НА ПРОСТОРІ L_1 ОПЕРАТОРАМИ З ОДНОВИМІРНИМ ОБРАЗОМ

М. М. Попов[1], О. Г. Фотій[2]

[1] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;*
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна; e-mail: misham.popov@gmail.com

[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;*
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна; e-mail: ofotiy@ukr.net

Замітка присвячена вивченню апроксимаційних властивостей вузьких операторів, заданих на просторі Лебеґа L_1, що діють у довільний банахів простір. Нова властивість, яку ми досліджуємо, полягає в тому, що вузький оператор на ``значній'' частині області визначення є як завгодно близьким в розумінні операторної норми до оператора з одновимірним образом. ``Значна'' частина – це підпростір, який є ізометрично ізоморфним до L_1, і на якому оператор ``майже'' досягає своєї норми. Це виглядає дещо несподіваним, адже серед вузьких операторів є ізоморфні вкладення, а на просторі L_p при $p>1$ кожний лінійний обмежений оператор подається у вигляді суми двох вузьких операторів. Доведення основного результату використовує лему Розенталя про множину векторів простору L_1, на якоих лінійний обмежений оператор ``майже'' досягає своєї норми, а також техніку базисів Шаудера. Наприкінці ми наводимо приклади різного типу вузьких операторів та їх відповідних апроксимацій. Серед них строго вузький оператор, а саме оператор умовного математичного сподівання по відношенню до під-σ-алгебри множин X×[0,1], де X – довільна борелівська підмножина на [0,1], який апроксимується за допомогою свого звуження. Неявно сформульовано відкриту задачу про конструктивну апроксимацію деякого компактного оператора з нескінченновимірними образами, що зображається у вигляді степеневого ряду за степенями двійки та системи Радемахера на відрізку [0,1], та обчислення норми якого обчислювально складна задача.

Ключові слова: простір Лебеґа, вузький оператор, компактний оператор, банахів простір.

The note is devoted to the study of further properties of narrow operators, defined on the Lebesgue space L_1 and acting to an arbitrary Banach space. We investigate a new property, which asserts that any narrow operator on an ``essential'' part of the domain space is arbitrary close in the sense of operator norm, to a rank one operator. ``Essential'' means a subspace, which is isometrically isomorphic to L_1 itself and on which the operator ``almost'' attains its norm. It looks somewhat strange, because there are isomorphic embeddings among narrow operators, and every linear bounded operator on the space L_p with $p>1$ can be represented as a sum of two narrow operators. The proof of the main result uses Rosenthal's lemma on the set of vectors on the space L1, at which the operator ``almost'' attains its norm, and the Schauder bases technique. Finally we provide some examples of narrow operators with their corresponding approximations. Among these examples there is a strictly narrow operator, namely, the operator of conditional mathematical expectation with respect to the sub-σ-algebra of sets X×[0,1], where X is an arbitrary Borel subset of [0,1], which is approximated by means of its restriction. There is an implicitly formulated open problem of constructive approximation of a certain compact operator with infinite-dimensional images, which is represented as a power series by the powers of two and the Rademacher system on the interval [0,1], for which the evaluation of the norm is a computationally difficult problem.

Keywords: Lebesgue space, narrow operator, compact operator, Banach space.

Вступ

Вузькі оператори, які у певному сенсі узагальнюють компактні оператори, були введені та систематично досліджені у статті [1], і надалі активно досліджувалися у низці праць різних математиків (див. огляд [2] та монографію [3]). Серед вузьких операторів є «дуже» некомпактні оператори, якими є ізоморфні вкладення [3, Theorem 4.10] (більш того, на просторах L_p при $1 < p < \infty$ кожний оператор $T: L_p \to L_p$ є сумою двох вузьких операторів [3, Theorem 5.2]). Незважаючи на це, у даній замітці ми показуємо, використовуючи специфіку простору Лебеґа L_1, що кожний вузький оператор, що діє з L_1 у довільний банахів простір, з довільною точністю може бути апроксимованим на «великому» підпросторі області визначення L_1 певним оператором з одновимірним образом.

Наведемо необхідну інформацію. Лінійний неперервний оператор T: $L_1 \to X$, що діє з простору $L_1 = L_1[0,1]$ всіх класів еквівалентності сумовних дійснозначних вимірних функцій, визначених на відрізку [0,1], у банахів простір X, називається вузьким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ та довільної вимірної підмножини $A \subset [0,1]$ існує розбиття $A = B \cup C$ на вимірні підмножини таке, що $B \cap C = \emptyset$ та

$$\| T(\chi(B) - \chi(C))\| < \varepsilon,$$

де $\chi(D)$ – характеристична функція множини $D \subset [0,1]$.

Через $\mathscr{L}$ (X,Y) ми позначатимемо множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють з банахового простору X у банахів простір Y.

Основні результати

Наступне означення уточнює, в якому сенсі ми апроксимуємо оператори.

Означення. Нехай *X* – банахів простір та $\varepsilon > 0$. *ε-апроксимацією оператора T є $\mathscr{L}(L_1,X)$ оператором з одновимірним образом* називатимемо трійку $(A,\mathcal{B}_0,x_0)$, де *A* – вимірна підмножина *[0,1]*, $\mathcal{B}_0$ – безатомна під-σ-алгебра борелівської σ-алгебри $\mathcal{B}(A)$ підмножин множини *A*, x_0 – вектор з *X*, для яких виконуються наступні дві умови:

(i) $||T|| - \varepsilon \le ||T|_{L1(\mathcal{B}0)}||$;
(ii) $||T|_{L1(\mathcal{B}0)} - T_0|| < \varepsilon$,

де $T_0\colon L_1 \to X$ – оператор з одновимірним образом, заданий за допомогою формули:

$$T_0\, x = (\mu(A)^{-1} \textstyle\int_A x\, d\mu)\, x_0\,. \qquad (*)$$

Наступна теорема є основним результатом цієї замітки.

Теорема. Нехай *X* – банахів простір і *T* є $\mathscr{L}(L_1,X)$ – вузький оператор. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує ε-апроксимація оператора *T*.

Для доведення нам потрібна наступна лема, яка належить Розенталю [4], але потім була неодноразово перевідкрита іншими математиками, див., наприклад, [5], [6]. Доведення леми Розенталя можна також знайти у [3, теорема 7.31].

Лема. Нехай *X* – банахів простір і *T* є $\mathscr{L}(L_1,X)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує вимірна підмножина *A* відрізка *[0,1]* строго додатної міри така, що

$$(||T|| - \varepsilon)\, ||x|| \le ||Tx|| \qquad (1)$$

для довільного додатного елемента *x* простору L_1, носій якого лежить в *A*.

Доведення теореми. Виберемо, згідно з лемою, вимірну підмножину *A* відрізка *[0,1]* строго додатної міри таку, що виконується нерівність (1) для довільного додатного елемента *x* простору L_1, носій якого лежить в *A*. Побудуємо дерево вимірних підмножин ($A_{n,k}$: $n = 0, 1,\ldots, k = 1, 2,\ldots, 2^n$) відрізка [0,1], починаючи з множини $A_{0,1} = A$ так, щоби

$$A_{n,k} = A_{n+1,2k-1} \cup A_{n+1,2k},\ \ A_{n+1,2k-1} \cap A_{n+1,2k} = \emptyset,$$

$$\mu(A_{n+1,2k-1}) = \mu(A_{n+1,2k}) = \mu(A_{n,k})/2 \text{ для } n = 0, 1,\ldots, k = 1, 2,\ldots, 2^n,$$

причому так, щоби відповідна L_∞-нормована система Гаара (g_i: i = 1,2, …), що визначається рівностями $g_1 = \chi(A_{0,1})$ та

$$g_{2^n+k} = \chi(A_{n+1,2k-1}) - \chi(A_{n+1,2k}) \qquad (2)$$

для $n = 0, 1,\ldots, k = 1, 2,\ldots, 2^n$ мала такі властивості:

$$Tg_1 = x_0;\ \|Tg_i\| < 2^{-i-1}\, \varepsilon\, \|g_i\|,\ \ i = 2,3,\ldots \qquad (3)$$

Фактично, перший крок вже зроблено: $A_{0,1}=A$. Подальшу побудову здійснюватимемо рекурсивно. Нехай для даного n побудовано множини $A_{n,1}, \ldots, A_{n,2^n}$ з потрібними властивостями. Побудуємо на наступному кроці множини $A_{n+1,1}, \ldots, A_{n+1,2^{n+1}}$ у такий спосіб. Для кожного $k = 1, \ldots, 2^{n+1}$ виберемо, згідно з означенням вузького оператора, розбиття

$$A_{n,k} = A_{n+1,2k-1} \cup A_{n+1,2k},\ \ A_{n+1,2k-1} \cap A_{n+1,2k} = \emptyset$$

так, щоби для функції g_{2^n+k}, заданої рівністю (2), виконувалась нерівність (3) з $i = 2^n+k$. Отже, дерево множин ($A_{n,k}$) та послідовність функцій (g_i) побудовано рекурсивно. Тепер визначимо $\mathcal{B}_0$, як найменшу під-σ-алгебру борелівської σ-алгебри $\mathcal{B}(A)$ підмножин множини *A*, яка містить всі множини $A_{n,k}$ при $n = 0, 1,\ldots,$

$k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Нарешті, покладемо $x_0 = T\chi(A_{0,1})$ і покажемо, що трійка (A, σ_0, x_0) є ε-апроксимацією оператора T. Зазначимо, що умова (і) випливає з (1). Для доведення умови (іі) скористаємося тим фактом, що система Гаара (g_i: i = 1,2, …) є монотонним базисом Шаудера банахового простору $L_1(\sigma_0)$, згідно з [7, с.3]. Для кожного елемента

$$x = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots \qquad (4)$$

простору $L_1(\sigma_0)$ позначимо

$$S_i = a_1 g_1 + \ldots + a_i g_i.$$

Тоді, згідно з монотонністю базису, для кожного i = 2,3, … отримуємо

$$|a_i|\,\|g_i\| = \|a_i g_i\| = \|S_i - S_{i-1}\| \le$$
$$\le \|S_i\| + \|S_{i-1}\| \le 2\,\|x\|.$$

Таким чином, для оператора T_0, заданого рівністю (*), отримуємо для кожного $x \in L_1(\sigma_0)$ вигляду (4), згідно з (3)

$$\|Tx - T_0x\| = \|a_1Tg_1 + a_2Tg_2 + \ldots - a_1x_0\| \le$$
$$\le |a_2|\,\|Tg_2\| + |a_3|\,\|Tg_3\| + \ldots \le$$
$$\le 2\,\|x\|\,\varepsilon\,(2^{-3} + 2^{-4} + \ldots) = 2^{-1}\,\varepsilon\,\|x\|,$$

а отже, (іі), а разом із тим, теорему доведено.

Приклади

Приклад 1. Позначимо $\mathbf{1} := \chi[0,1]$ та $\mathbf{r} := \chi[0,1/2) - \chi[1/2,1]$. Визначимо оператор $T: L_1 \to L_1$, поклавши для кожного x з L_1

$$Tx = \alpha\,(\textstyle\int_{[0,1]} x\,d\mu)\,\mathbf{1} + \beta\,(\int_{[0,1]} xr\,d\mu)\,r\,.$$

Неважко показати, що $\|T\| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$. Для апроксимації оператора T оператором з одновимірним образом з довільною точністю $\varepsilon>0$ покладемо $A = [0,1/2]$, σ_0 – борелівська σ-алгебра підмножин A та $x_0 = \alpha\mathbf{1}+\beta r$. Тоді для довільного елемента x з $L_1(\sigma_0)$ отримуємо $Tx = (\int_{[0,1/2]} x\,d\mu)\,x_0$, а отже, достатньо взяти в ролі T_0 звуження оператора T на $L_1(\sigma_0)$.

Приклад 2. Розглянемо оператор $T: L_p[0,1]^2 \to L_p[0,1]$ при $1 \le p < \infty$, заданий формулою:

$$(Tf)(x) = \textstyle\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy.$$

Таким чином, T – це оператор умовного математичного сподівання по відношенню до під-σ-алгебри множин вигляду X×[0,1], де X – довільна борелівська підмножина на [0,1]. Іншими словами, T – це проектор норми 1 на підпростір функцій, які не залежать від другої змінної. Покладемо $A = [0,1]^2$, σ_0 – під-σ-алгебра множин вигляду [0,1]×X, де X – довільна борелівська підмножина на [0,1]. Тоді довільний елемент f з $L_1(\sigma_0)$ є функцією, не залежною від першої змінної, а отже, функція Tf є сталою, помноженою на тотожну одиницю – оператор з одновимірним образом. Як і в прикладі 1, апроксимація здійснюється за допомогою звуження самого оператора, незалежно від ε.

Обидва приклади операторів належать до класу строго вузьких операторів (оператор $T: L_1 \to X$ називається строго вузьким, якщо для довільної вимірної підмножини $A \subset [0,1]$ існує розбиття $A = B \cup C$ на вимірні підмножини таке, що $B \cap C = \emptyset$ та $T\chi(B) = \chi(C)$. Для строго вузьких операторів апроксимація операторами з одновимірними образами здійснюється незалежно від ε, що можна легко отримати з доведення теореми. З іншого боку, той факт, що оператори з прикладів 1 і 2 є строго вузькими, не є очевидним; для цього потрібно використовувати певні теореми про строго вузькі оператори (див. [3]).

Стосовно вузьких операторів, які не є строго вузькими та для яких апроксимація істотно залежить від ε, зазначимо, що такими, наприклад, є компактні оператори з нескінченновимірними образами, наприклад, оператор $T: L_1 \to L_1$, визначений рівністю

$$Tx = \textstyle\sum_n 2^{-n}(\int_{[0,1]} xr_n\,d\mu)\,r_n,$$

де (r_n) – система Радемахера на відрізку [0,1]. Проте описати конкретну апроксимацію такого оператора виявляється досить складною задачею (навіть обчислити норму такого оператора досить складно).

Список використаних джерел / References

1. Plichko A., Popov M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces. Diss. Math. Rozprawy Mat. 1990. 306. P. 1-85.

2. Popov M. Narrow operators (a survey). *Banach Center Publ*. 2011. 92. P. 299-326.

3. Popov M., Randrianantoanina B. Narrow operators on function spaces and vector lattices. 2013. De Gruyter. Berlin-Boston.

4. Rosenthal H.P. Embeddings of L^1 in L^1. *Contemp. Math*. 1984. 26. P. 335-349.

5. Shvydkoy R.V. The largest linear space of operators satisfying the Daugavet equation in L_1. *Proc. Amer. Math. Soc*. 2001. Vol. 130 (3). P. 773-777.

6. Mykhaylyuk V.V., Popov M.M. Some geometric aspects of operators acting from L_1. *Positivity*. 2006. 10. p. 431-466.

7. Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach spaces, Vol. 1, Sequence spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 1977.

APPROXIMATION OF NARROW OPERATORS ON THE SPACE L_1 BY RANK ONE OPERATORS

M. M. Popov[1], O. G. Fotii [2]

[1]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
57 Shevchenka str., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine;
e-mail: *misham.popov@gmail.com*

[2]Jury Fedkovych Chernivtsi National University;
2 Kotsiubynskoho str., Chernivtsi, 58012, Ukraine;
e-mail: *ofotiy@ukr.net*