

УДК 517.98

DOI 10.31471/1993-9981-2024-2(53)-114-120

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ФУНКЦІОНАЛИ НА ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

А. В. Загороднюк¹, О. М. Голубчак²

¹Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна;

²Івано-Франківський фаховий коледж Львівського національного університету
природокористування; вул. Юності, 11, м. Івано-Франківськ, 76492, Україна;
e-mail: andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua, oleggol@ukr.net

Досліджуються мультиплікативні лінійні функціонали на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій на банаховому просторі всіх абсолютно сумовних послідовностей. Евклідову структуру на просторі симетричних поліномів на можна отримати, якщо припустити, що всі степеневі поліноми ортогональні. Поповнення цього простору дає нам простір Гільберта симетричних аналітичних функцій. Лінійний функціонал є мультиплікативним, якщо він мультиплікативний на підпросторі симетричних поліномів, що розглядається як алгебра відносно поточкового множення. Тобто, лінійний мультиплікативний функціонал зберігає операції додавання і множення на підпросторі поліномів. Основною метою роботи є встановлення необхідних і достатніх умов неперервності лінійного мультиплікативного функціоналу на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій за умови мультиплікативності гільбертової норми. Показано, що не існує мультиплікативної норми на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій такої, що радіус рівномірної збіжності всіх функцій є нескінченним. Крім того, ми будемо приклад неперервного мультиплікативного функціоналу, який не є функціоналом значення в жодній точці. Знайдено необхідні і достатні умови неперервності лінійних мультиплікативних функціоналів на гільбертовому просторі симетричних аналітичних функцій. Порівняно мультиплікативні функціонали гільбертового простору симетричних аналітичних функцій із характеристиками алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу і виявлено, що множини цих функціоналів мають непорожній перетин, але не містять одна одну. Також, розглянуто детальніше мультиплікативні функціонали, які не є функціоналами значення в точках. Зокрема, показано, що будь-який функціонал значення в деякій точці можна подати у вигляді лінійної комбінації функціоналів спеціального вигляду.

Ключові слова: симетричні поліноми, симетричні аналітичні функції, спектр.

We investigate multiplicative linear functionals on a Hilbert space of symmetric analytic functions on the Banach space of all absolutely summing sequences. An Euclidian structure on the space of symmetric polynomials can be obtained if we suppose that all power polynomials are orthogonal. The completion of this space gives us a Hilbert space of symmetric analytic functions. A linear functional is multiplicative if it is multiplicative on the subspace of symmetric polynomials, which is considered algebra with respect to pointwise multiplication. That is, a linear multiplicative functional preserves the operations of addition and multiplication on the subspace of polynomials. It is shown that there is no multiplicative norm on the Hilbert space of symmetric analytic functions such that the radius of uniform convergence of all functions is infinite. The main goal of the paper is to establish necessary and sufficient conditions for the continuity of a linear multiplicative functional on the Hilbert space of symmetric analytic functions, providing that the Hilbert norm is multiplicative. Also, we construct an example of a continuous multiplicative functional that is not an evaluation at any point of the space. Necessary and sufficient conditions for the continuity of linear multiplicative functionals on the Hilbert space of symmetric analytic functions are found. We compare multiplicative functionals of the Hilbert space of symmetric analytic functions with characters of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type and find out that the sets of these functionals have nonempty intersection but do not contain each other. Finally, we consider, more precisely, multiplicative functionals that are not point evaluations. In particular, we show that any point evaluation functional can be represented as a linear combination of functionals of special form.

Keywords: symmetric polynomials, symmetric analytic functions, spectrum.

Вступ

Симетричні поліноми від багатьох комплексних змінних є класичним об'єктом алгебри і аналізу. Дослідження

симетричних поліномів на гільбертових просторах і, більш загально, на просторах l_1 і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$ розпочато у статті [1]. У цій статті, зокрема, дано означення

симетричних поліномів на даних просторах і наведено приклади. Також було доведено, що кожен симетричний поліном на гільбертовому просторі, просторах l_1 і $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$ виражається через алгебраїчну комбінацію елементарних симетричних поліномів. Пізніше вказані результати було узагальнено для інших просторів у працях М. Гонзалеса, Р. Гонзало, Х. Харамілло [2], Г. Галіндо, Т. Василичина, А. Загороднюка [3-4]. Алгебри симетричних поліномів та їх спектри досліджувались в [5]. В даній роботі досліджено гільбертові простори симетричних аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних та функціонали, які діють в цих просторах. Основні відомості з теорії поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах можна знайти в [6].

Функція f на нормованому просторі X з симетричним базисом називається симетричною, якщо вона інваріантна відносно довільної перестановки базисних векторів. Позначимо через $P_s(X)$ алгебру всіх симетричних поліномів на нормованому просторі X з симетричним базисом. Послідовність $\{Q_n\} \subset P_s(X)$ називається алгебраїчним базисом в $P_s(X)$, якщо вона алгебраїчно незалежна і для кожного $P \in P_s(X)$ існує поліном від скінченної кількості змінних $q(t_1, t_2, \dots, t_m)$ такий, що

$$P(x) = q(Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_m(x)), x \in X.$$

У цій статті ми розглядаємо випадок, коли $X = l_1$ – простір абсолютно сумовних послідовностей, і P_n , $n \in \mathbb{N}$ $n \in N$ – алгебраїчний базис степеневих симетричних поліномів на l_1 ,

$$P_n(x) = P_n((x_1, x_2, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n.$$

Нехай $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – розбиття деякого натурального числа n на натуральні

доданки $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тобто, $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = n$. Ми будемо використовувати позначення $P_\lambda = P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_m}$. Відомо (див. [7]), що поліноми P_λ утворюють лінійний базис в алгебрі $P_s(X)$.

На $P_s(X)$ можна ввести структуру евклідового простору за допомогою наступного скалярного добутку: $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ – символ Кронекера, $b_\lambda > 0$. Даний скалярний добуток породжує норму

$$\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle} = \sqrt{b_\lambda}.$$

Поповнення простору $P_s(l_1)$ відносно даної норми для випадку $b_\lambda = 1$ будемо позначати $H_s(l_1)$, а в загальному випадку $H_s^b(l_1)$ – гільбертів простір симетричних функцій на l_1 з вагою $b = \{b_\lambda\}_\lambda$.

Очевидно, що значення в точці $x \in l_1$ породжує функціонал $\delta_x : P \mapsto P(x)$, $P \in P_s(l_1)$.

Основні результати

Легко бачити, $H_s^b(l_1)$ не є алгеброю відносно поточкового множення. Проте, добуток двох поліномів з $H_s^b(l_1)$ належить $H_s^b(l_1)$.

Означення 1

Лінійний функціонал $\varphi : H_s^b(l_1) \rightarrow \mathbb{C}$ називається мультиплікативним, якщо $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s(l_1)$. Аналогічно, лінійний оператор $\Phi : H_s^b(l_1) \rightarrow H_s^b(l_1)$ називається мультиплікативним, якщо $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s^b(l_1)$.

Оскільки ортонормований базис простору $H_s^b(l_1)$ утворюють скінченні добутки поліномів P_k , то кожен мультиплікативний функціонал φ на

$H_s^b(\ell_1)$ повністю визначається своїми значеннями на $P_k, k=1, 2, \dots$. Навпаки, поклавши $\varphi(P_k) = a_k$ для деякої послідовності чисел a_k , ми можемо однозначно продовжити за лінійністю і мультиплікативністю φ до лінійного мультиплікативного функціонала на щільний підпростір $P_s(\ell_1) \subset H_s^b(\ell_1)$. Якщо при цьому функціонал φ буде обмеженим, а отже, неперервним, то його можна продовжити за неперервністю на $H_s^b(\ell_1)$. Таким чином, задача опису множини $M(H_s^b(\ell_1))$ лінійних мультиплікативних функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$ зводиться до опису множини послідовностей a_k , для яких функціонал $\varphi(P_k) = a_k$ буде обмеженим на $P_s^b(\ell_1)$.

Лема 2

Припустимо, що на $H_s^b(\ell_1)$ задано мультиплікативну норму. Тоді лінійний мультиплікативний функціонал φ на підпросторі поліномів $P_s^b(\ell_1) \subset H_s^b(\ell_1)$ буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли для послідовності значень $a_k = \varphi(P_k), k \in \mathbb{N}$ множина

$$\left\{ \frac{a_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} = \frac{a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}}{\sqrt{b_\lambda}} : |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \in \mathbb{N} \right\}$$

є абсолютно сумовною в квадраті. В цьому випадку

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Доведення

Нехай f – довільний елемент з $H_s^b(\ell_1)$. За означенням простору $H_s^b(\ell_1)$, f можна подати у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda,$$

$$\text{де } \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 b_\lambda < \infty.$$

Припустимо, що $\varphi \in M(H_s^b(\ell_1))$. Тоді

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda \varphi(P_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda a_\lambda < \infty.$$

З того, що $\varphi(P_\lambda) = a_\lambda$ випливає, що

$$\varphi = \left\langle \cdot, \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{|P_\lambda|^2} \right\rangle \right\rangle = \left\langle \cdot, \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \frac{a_\lambda P_\lambda}{b_\lambda} \right\rangle \right\rangle. \quad (1)$$

Тому

$$\|\varphi\|^2 = \varphi|\varphi| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Навпаки, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda} < \infty,$$

то формула (1) визначає функціонал

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} c_\lambda \varphi(P_\lambda)$$

кожної функції $f \in H_s^b(\ell_1)$ і

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2}{b_\lambda}.$$

Означення 3

Скажемо, що норма простору $H_s^b(\ell_1)$ субмультиплікативна, якщо існує константа $C > 0$, яка не залежить від λ така, що $C \|P_\lambda P_\mu\| \geq \|P_\lambda\| \|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ . У випадку, якщо $\|P_\lambda P_\mu\| = \|P_\lambda\| \|P_\mu\|$ для довільних розбиттів λ, μ , норма простору $H_s^b(\ell_1)$ буде називатись мультиплікативною.

Очевидно, що норма простору $H_s^b(\ell_1)$ є мультиплікативною тоді і тільки тоді, коли для довільного розбиття $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $b_\lambda = b_{\lambda_1} \cdots b_{\lambda_n}$. Випадок $b_\lambda \equiv 1$ є, звичайно, прикладом мультиплікативної норми. Легко бачити,

що випадок $b_\lambda = z_\lambda$ визначає субмультиплікативну але не мультиплікативну норму, де

$$z_\lambda = \prod_{r \geq 1} (r^{m_r} m_r!),$$

де r та m_r визначені із зображення λ у вигляді

$$\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, r^{m_r}, \dots).$$

Проте, формула

$$b_\lambda = \frac{z_\lambda}{\prod_{z \geq 1} m_z!} = \prod_{z \geq 1} r^{m_r}$$

визначає мультиплікативну норму на $H_s^b(\ell_1)$. Зауважимо, що не існує мультиплікативної норми на $H_s^b(\ell_1)$ такої, що радіус рівномірної збіжності всіх функцій з $H_s^b(\ell_1)$ є нескінченним. Справді, нехай $\|P_1\| = c > 0$. З мультиплікативності норми випливає, що

$$\|P_1^n\| = \sqrt{b_{(1, \dots, 1)}} = \sqrt{c^n}.$$

Тому, радіус рівномірної збіжності r функцій з $H_s^b(\ell_1)$ не перевищує $\sqrt{c}$.

Позначимо

$$\mathbb{D}_2^b = \{a_k : (a_k / \sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2, |a_k| < \sqrt{b_{\lambda_k}}\}.$$

Для випадку мультиплікативної норми маємо наступну теорему.

Теорема 4

Припустимо, що на $H_s^b(\ell_1)$ задано мультиплікативну норму. Лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли послідовність $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ належить $\mathbb{D}_2^b$.

Доведення

Нехай $|a_k| < \sqrt{b_{\lambda_k}}$. Тоді $|a_k| / \sqrt{b_{\lambda_k}} < 1$.

Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_n}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |a_k|^2 (b_{\lambda_k})^{-1}}.$$

Цей добуток праворуч збігається, оскільки прологарифмувавши, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| -\log \frac{1}{1 - |a_k|^2 (b_{\lambda_k})^{-1}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 b_{\lambda_k} = \| (a_k (\sqrt{b_{\lambda_k}})^{-1}) \|^2.$$

для деякої константи c .

Таким чином, з того, що послідовність $(a_k / \sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2$, за лемою 2, маємо

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_n}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |a_k|^2 (b_{\lambda_k})^{-1}} \leq e^{\|(a_k / \sqrt{b_{\lambda_k}})\|^2} \end{aligned}$$

і, отже, φ – обмежений функціонал.

Навпаки, якщо φ – обмежений функціонал, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 / b_{\lambda_k} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n} \frac{|a_{\lambda_1} \dots a_{\lambda_n}|^2}{b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_n}} = \|\varphi\|^2.$$

Тому послідовність $(a_k / \sqrt{b_{\lambda_k}}) \in \ell_2$.

Припустимо, що для деякого k , $|a_k| / \sqrt{b_{\lambda_k}} \geq 1$. Розглянемо елемент $f \in H_s^b(\ell_1)$ вигляду

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_k^m}{(b_{\lambda_k})^{m/2} m}.$$

Очевидно, що

$$\|f\|^2 = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right| < \infty.$$

Тоді

$$\varphi(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_k^m}{m (b_{\lambda_k})^{m/2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\sqrt{b_{\lambda_k}}} \right)^m \frac{1}{m} = \infty,$$

тобто в цьому випадку φ не визначений на $H_s^b(\ell_1)$. Отже, $|a_k| < 1$ для кожного k , тобто $a \in \mathbb{D}_2^b$.

Зауважимо, що функціонал значення в точці $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in H_s(\ell_1)$ буде неперервним мультиплікативним функціоналом тоді і тільки тоді, коли

$$x \in \Omega = \{x \in \ell_1 : |P_k(x)| < 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

Таким чином, якщо $\varphi = \delta_x$ для деякого $x \in \ell_1$ і

$$|a_k| = |\varphi(P_k)| = |P_k(x)| < 1, \text{ то } a = \{a_k\}$$

автоматично належить множині $\mathbb{D}_2 \subset \ell_2$.

Покажемо, що існують елементи з $M(H_s(\ell_1))$, які не є функціоналами значення в точці.

Приклад 5

Розглянемо скінченну послідовність $\{a_1, \dots, a_m : |a_i| < 1\}$, для якої не всі $a_i = 0$.

За теоремою 4, для будь-якої такої послідовності існує такий функціонал $\varphi \in M(H_s(\ell_1))$ такий, що $\varphi(P_k) = a_k, 1 \leq k \leq m$ і $\varphi(P_k) = 0, k > m$. З роботи [8] відомо, що не існує елемента $x \in \ell_1$, для якого $\varphi(P_k) = \delta_x(P_k)$ для всіх k . Тому, φ не є функціоналом значення в точці.

Приклад 6

Нехай $z = \{z_n : |z_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$ – деяка обмежена послідовність така, що для деякого $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{m+1} < \infty \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$$

збігається умовно (але не абсолютно) для всіх $k \leq m$. Тоді

$$P_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$$

є визначені для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\{a_k\} = \{P_k(z)\} \in \ell_2$. Тому, існує функціонал $\varphi \in M(H_s(\ell_1))$ такий, що $\varphi(P_k) = P_k(z)$. Але $z \notin \ell_1$, тому φ не є функціоналом значення в точці.

Позначимо через $\mathcal{H}_s$ простір $H_s^b(\ell_1)$ для випадку $b_\lambda \geq |\lambda|!$. Відомо, що $\mathcal{H}_s$ – щільний підпростір в алгебрі симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $H_{bs}(\ell_1)$ на ℓ_1 (див. [5]).

Таким чином, кожен характер алгебри $H_{bs}(\ell_1)$ буде лінійним мультиплікативним функціоналом на $\mathcal{H}_s$. Зокрема, серед характерів $H_{bs}(\ell_1)$ є однопараметрична сім'я ψ_s , $s \in \mathbb{C}$ така, що

$$\psi_s(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\underbrace{\frac{s}{n}, \frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}}_n, 0, 0, \dots\right).$$

При цьому $\psi_s(P_1) = s$ і $\psi_s(P_k) = 0$ для $k > 1$. Очевидно, що функціонал ψ_s на $\mathcal{H}_s$ має вигляд $\psi_s(f) = f|sP_1$.

$$\text{В подібний спосіб } \psi_{s,k}(f) = \frac{f|sP_k}{\|P_k\|^2}$$

можна задати мультиплікативні функціонали на $\mathcal{H}_s$ такі, що $\psi_{s,k}(P_n) = s\delta_{kn}$ для достатньо малих s (див. наступне твердження). Проте, функціонали $\psi_{s,k}$ вже не будуть неперервними в топології простору $H_{bs}(\ell_1)$ [5]. Тобто, не всі мультиплікативні функціонали на просторі $\mathcal{H}_s$ продовжуються до характерів алгебри $H_{bs}(\ell_1)$.

Аналоги функціоналів $\psi_{s,k}$ існують для широкого класу просторів $H_s^b(\ell_1)$.

Лема 7

На просторі $H_s^b(\ell_1)$ з субмультиплікативною нормою $\|\cdot\|$ існує мультиплікативна гільбертова норма $|||\cdot|||$, неперервна відносно $\|\cdot\|$ і базис $\{P_\lambda\}$ буде ортогональним у $(H_s^b(\ell_1), |||\cdot|||)$.

Доведення

Для того, щоб визначити норму на гільбертовому просторі, достатньо її визначити на ортогональному базисі $\{P_\lambda\}$.

Покладемо $\| \| P_k \| \| = \| P_k \|$, $k \in \mathbb{N}$ і якщо $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, то

$$\| \| P_\lambda \| \| := \| P_{\lambda_1} \| \cdots \| P_{\lambda_m} \|.$$

Таким чином, умова мультиплікативності для норми $\| \| \cdot \| \|$ виконується. Покажемо, що ця норма є неперервною відносно $\| \cdot \|$ і коректно визначеною на всьому просторі.

З умови ортогональності $\{P_\lambda\}$ і умови субмультиплікативності, для довільної скінченної суми $\sum_{\lambda} c_\lambda P_\lambda \in H_s^b(\ell_1)$ маємо:

$$\begin{aligned} \| \| \sum_{\lambda} c_\lambda P_\lambda \| \|^2 &= \sum_{\lambda} |c_\lambda|^2 \| \| P_\lambda \| \|^2 = \\ &= \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} |c_\lambda|^2 \| P_{\lambda_1} \|^2 \cdots \| P_{\lambda_m} \|^2 \\ &\leq C \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} |c_\lambda|^2 \| P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_m} \|^2 = \\ &= C \| \sum_{\lambda} c_\lambda P_\lambda \|^2 \end{aligned}$$

для деякої константи $C > 0$. Отже, норма $\| \| \cdot \| \|$ є обмеженою, а тому неперервною відносно норми $\| \cdot \|$ і, тому буде коректно визначеною на всьому просторі $H_s^b(\ell_1)$.

Твердження 8

У просторі $H_s^b(\ell_1)$ з субмультиплікативною нормою існують неперервні мультиплікативні функціонали $\psi_{s,k}$, $\psi_{s,k}(P_n) = s\delta_{kn}$ для тих і тільки тих комплексних чисел s , які задовольняють нерівність $|s| < \sqrt{b_{\lambda_k}} = \| P_k \|$.

Якщо норма $H_s^b(\ell_1)$ субмультиплікативна, то функціонали $\psi_{s,k}$ для $|s| < \sqrt{b_{\lambda_k}}$ будуть неперервними.

Доведення

Нехай норма простору $H_s^b(\ell_1)$ – мультиплікативна. За теоремою 4 мультиплікативний функціонал $\psi_{s,k}$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли

$|s| = |\psi_{s,k}(P_k)| < b_{\lambda_k}$. В загальному випадку, субмультиплікативної норми, за лемою 7 на $H_s^b(\ell_1)$ існує неперервна мультиплікативна норма $\| \| \cdot \| \|$. За доведеним вище, функціонали $\psi_{s,k}$ є обмеженими відносно цієї норми. Тому вони будуть обмеженими і відносно норми $\| \cdot \|$.

Позначимо $\psi_k := \sqrt{b_k} \psi_{1,k} = \| P_k \| \psi_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\| \psi_k \| = \psi_k \left(\frac{P_k}{\| P_k \|} \right) = 1$$

і функціонали $\{\psi_k\}$ є попарно ортогональними в просторі лінійних неперервних функціоналів на $H_s^b(\ell_1)$. Позначимо E_b – замкнену лінійну оболонку функціоналів ψ_k , $k \in \mathbb{N}$.

Твердження 9

Для кожного $x \in \Omega_b$ функціонал $\delta_x \in E_b$.

Доведення

Оскільки функціонали ψ_k біортогональні до поліномів $\frac{P_k}{\| P_k \|}$, то

$$\delta_x, \psi_k = \delta_x \left(\frac{P_k}{\| P_k \|} \right) = \frac{P_k(x)}{\| P_k \|}.$$

Тому функціонал δ_x повністю визначається послідовністю $\{\delta_x, \psi_k\}$ і, оскільки δ_x мультиплікативний, то за теоремою 4

$$|\delta_x(P_k)| = |P_k(x)| \leq \sqrt{b_k} = \| P_k \|.$$

Таким чином, поклавши $a_k = P_k(x)$, за лемою 2 маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \delta_x, \psi_k \psi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_k(x)|^2}{\| P_k \|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{b_k} < \infty.$$

Отже, елемент $\delta_x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_x, \psi_k \psi_k$ належить простору E_b .

Список використаних джерел /
References

1. Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On Polynomial Approximation of Functions on Hilbert Space. *Math. USSR-Sb.* 1973. Vol. 21(2). P. 255–277. DOI: [10.1070/SM1973v021n02ABEH002016](https://doi.org/10.1070/SM1973v021n02ABEH002016)
2. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces. *Jour. London Math. Soc.* 1999. Vol. 59 P. 681–697. DOI: [10.1112/S0024610799007164](https://doi.org/10.1112/S0024610799007164)
3. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ . *RACSAM.* 2020. Vol. 114(56). 13 p. DOI: [10.1007/s13398-020-00791-w](https://doi.org/10.1007/s13398-020-00791-w)
4. Vasylyshyn, T. Symmetric analytic functions on the Cartesian power of the complex Banach space of Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0, 1]$. *J. Math. Anal. Appl.* 2022. Vol. 509. Iss. 2. 125977. DOI: [10.1016/j.jmaa.2021.125977](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125977)
5. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2012. Vol. 55. P.125-142. DOI: [10.1017/S0013091509001655](https://doi.org/10.1017/S0013091509001655)
6. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. 1986. 434 p.
7. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. University lecture series. Providence, American Mathematical Society. 1997. 64 p.
8. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p . *Bull. Lond. Math. Soc.* 2003. Vol. 35. P. 55-64. DOI: [10.1112/S0024609302001431](https://doi.org/10.1112/S0024609302001431)

MULTIPLICATIVE FUNCTIONS ON
HILBERT SPACES OF SYMMETRIC
ANALYTIC FUNCTIONS

A. V. Zagorodniuk, O. M. Holubchak

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, Ukraine;
Ivano-Frankivsk College at the
Lviv National Agrarian University,
11 Ynosti Str., Ivano-Frankivsk, Ukraine;
e-mail: andriy.zagorodnyuk@pnu.edu.ua,
oleggol@ukr.net