УДК 517.98

DOI 10.31471/1993-9981-2024-1(52)-98-101

СПЕКТР АЛГЕБРИ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПРОСТОРІ $\ell_1 \oplus \ell_\infty$

В.В. Кравців
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна; e-mail: viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua

Робота присвячена дослідженню алгебри блочно-симетричних поліномів та аналітичних функцій від нескінченної кількості змінних на добутку банахових просторів $\ell_1 \oplus \ell_\infty$. метою даної роботи було дослідження спектру (множини характерів) алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$. В ході дослідження встановлено зв'язок спектру алгебр аналітичних функцій обмеженого типу із аналітичними функціями експоненціального типу. Також наведено приклад, який показує, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ не збігається з множиною класів еквівалентності функціоналів значення в точках. Таким чином вдалося частково описати спектр алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$. Оскільки між максимальними ідеалами і комплексними гомоморфізмами (характерами) банахової алгебри існує взаємнооднозначна відповідність, яка задається перетворенням Гельфанда, ми можемо трактувати елементи вихідної алгебри як функції на просторі максимальних ідеалів. Таким чином, спектр функціональної топологічної алгебри є природною областю визначення для її елементів. Тому опис спектра є першою важливою задачею, яка виникає при дослідженні конкретної комутативної банахової алгебри. Тому дана стаття має важливе значення у дослідженні алгебр блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на добутках банахових просторів.

Ключові слова: блочно-симетричні поліноми, блочно-симетричні аналітичні функції, спектр, характер.

The work is dedicated to the study of the algebra of block-symmetric polynomials and analytic functions of infinitely many variables on the product of Banach spaces. The aim of this research was to investigate the spectrum (the set of characters) of the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type on a given space. During the study, a connection was established between the spectrum of algebras of analytic functions of bounded type and analytic functions of exponential type. Additionally, an example was provided to demonstrate that the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions of bounded type does not coincide with the set of equivalence classes of point evaluation functionals. As a result, it was possible to partially describe the spectrum of the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type on the space. Since there is a one-to-one correspondence between maximal ideals and complex homomorphisms (characters) of a Banach algebra, established via the Gelfand transform, we can interpret the elements of the original algebra as functions on the space of maximal ideals. Thus, the spectrum of a functional topological algebra is a natural domain for its elements. Therefore, describing the spectrum is the first important task that arises when studying a specific commutative Banach algebra. This article is therefore of significant importance in the study of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type on products of Banach spaces.

Keywords: block-symmetric polynomials, block-symmetric analytic functions, spectrum, character.

Вступ

В останні роки зріс інтерес до дослідження інваріантів дії топологічних груп на нескінченновимірних просторах. Однією з таких груп є група підстановок на множині натуральних чисел. Якщо ця група діє на банаховому просторі з безумовним базисом, переставляючи базисні вектори, то її дія природно переноситься на поліноми та аналітичні функції на цьому просторі, а інваріанти утворюють алгебру симетричних аналітичних функцій. Класична теорія симетричних поліномів у скінченновимірних просторах досліджувалася у роботах [1-3].Симетричні поліноми на нескінченновимірних просторах досліджувалися у роботах [4-5]. Алгебри симетричних поліномів та аналітичних функцій на ℓ_p досліджували багато авторів [6-10]. Проте, як і у класичній теорії інваріантів [1], цікавий випадок, коли група діє на просторі, переставляючи підпростори, натягнуті на «блоки» базисних векторів. Тоді множиною інваріантів буде т. зв. алгебра блочно-симетричних аналітичних функцій. Опис та дослідження алгебраїчного базису таких алгебр проводилося у роботах [10-11]. Для вивчення конкретної комутативної алгебри важливо вміти описати її спектр (множину характерів). Відомо, що спектр алгебри цілих аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^s$ збігається з множиною функціоналів значення в точках. Описано [6-10, 12] відповідно спектри алгебри цілих симетричних аналітичних функцій $\mathcal{H}_s(\mathbb{C}^s)$ і алгебри блочно-симетричних поліномів $P_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$ та алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$. Нижче проаналізовано спектр алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу (тобто функцій, які обмежені на обмежених множинах) на деякому банаховому просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

Висвітлення основного матеріалу статті

Розглянемо простір $\ell_1 \oplus \ell_\infty$, елементами якого є вектори $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \ldots \right)$, де $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_\infty$.

Норму на цьому просторі визначимо наступним чином

$$\|(x,y)\|_{\ell_1\oplus\ell_\infty} = \sup\{\|x\|_{\ell_1}, \|y\|_{\ell_\infty}\} = $$
$$= \sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|, \sup_{i\geq 1}|y_i|\}.$$

Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$; $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ – алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$; $\mathcal{M}_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ – спектр алгебри $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ Алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ утворюють поліноми $H^{k_1,k_2}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{k_1} y_i^{k_2}$, де $k_1 \geq 1, k_2 \geq 0$.

Твердження 1. Для будь-якого $k_1 \geq 1, k_2 \geq 0$

$$\left\|H^{k_1,k_2}\right\| = 1$$

на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

Доведення. $\left\|H^{k_1,k_2}\right\| = \sup\limits_{\|(x,y)\|\leq 1}\left|H^{k_1,k_2}(x,y)\right|$.

У роботі [13] було доведено, що $\left\|H^{k_1,k_2}\right\| \leq 1$. Щоб показати рівність, розглянемо вектор

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots \right).$$

Тоді $\left\|H^{k_1,k_2}\right\| = \sup\limits_{\|(x_0,y_0)\|\leq 1}\left|H^{k_1,k_2}(x_0,y_0)\right| = 1.$

Позначимо через $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ – простір аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ вигляду

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2}(x,y).$$

Твердження 2. Простір $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ ізоморфний до простору цілих функцій $H(\mathbb{C}^2)$ на $\mathbb{C}^2$ вигляду

$$g(t_1,t_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}.$$

Доведення. Нехай

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2}(x,y).$$

Тоді радіус обмеженості ρ_0 цієї функції є нескінченним. Тобто

$$\rho_0 = \left(\limsup_{n\to\infty}\left(\|P_n\|\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} =$$
$$= \left(\limsup_{n\to\infty}\left(\|\sum_{k_1+k_2=n}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2}\|\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \quad (1)$$
$$= \left(\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{\|(x,y)\|\leq r}\frac{\|\sum_{k_1+k_2=n}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2}\|}{\|(x,y)\|}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \infty.$$

З теореми про степеневі ряди (див. 14) випливає, що

$$\| P_n \| \geq \sup_{(x,y)\in rB_{X^2}} \sum_{k_1+k_2=n}^{\infty} \left| a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right|,$$

тоді з (1) випливає

$$\rho_0 \leq \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{(x,y)\in rB_{X^2}} \sum_{k_1+k_2=n}^{\infty} \left| a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=n}^{\infty} \left| a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Отже, для будь-якого фіксованого $(x,y)\in \ell_1 \oplus \ell_\infty$ функція

$$g(t_1,t_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}$$

є цілою функцією над $\mathbb{C}^2$.

З іншого боку, нехай

$$g(t_1,t_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}$$

є цілою функцією над $\mathbb{C}^2$.

Тоді

$$\infty = \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} \left| a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\left| \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right| \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\limsup_{n\to\infty} \left(\| P_n \| \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Отже, $\rho_0 = \infty$, і функція $f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m$ є аналітичною функцією обмеженого типу на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

Отже, $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ ізоморфний до простору цілих функцій $H(\mathbb{C}^2)$ на $\mathbb{C}^2$ вигляду

$$g(t_1,t_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}.$$

Покажемо, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ не збігається з множиною класів еквівалентності функціоналів значення в точках. Розглянемо наступний приклад.

Приклад. Розглянемо послідовність елементів

$$e_1(\frac{1}{n}, y) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right),$$

$$e_2(\frac{1}{n}, y) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right), \cdots$$

$$e_k(\frac{1}{n}, y) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ y_k \end{pmatrix}, \ldots \right)$$

з просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ і для кожного n визначимо

$$v_n(\frac{1}{n}, y) = e_1(\frac{1}{n}, y) + e_2(\frac{1}{n}, y) + \ldots + e_n(\frac{1}{n}, y),$$

де $v_n(\frac{1}{n}, y) \in \ell_1 \oplus \ell_\infty$.

Тоді $\delta_{v_n((\frac{1}{n},y)}(H^{1,k}) = \dfrac{y_1^k + \ldots + y_n^k}{n}, \forall k \geq 1.$

З відносної компактності обмежених підмножин $M_{bvs}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ випливає існування граничної точки ϕ_U послідовності $\delta_{v_n(\frac{1}{n},y)}$, такої що

$$\phi_{(U)}(H^{1,k}) = \lim_U H^{1,k}(v_n(\frac{1}{n}, y)) = \lim_U \frac{y_1^k + \ldots + y_n^k}{n}.$$

Твердження. Якщо φ – характер алгебри $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$, то φ є функцією експоненціального типу.

Доведення. Нехай φ – характер алгебри $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$. Ця алгебра породжена поліномами $H^{k_1,k_2}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{k_1} y_i^{k_2}$, де $k_1 \geq 1, k_2 \geq 0$. Тоді

$$\varphi\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m} a_{k_1,k_2} H^{k_1,k_2} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m} a_{k_1,k_2} \varphi(H^{k_1,k_2}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=m} a_{k_1,k_2} \xi_{k_1,k_2} < \infty .$$

Тоді $\xi = (\xi_{1,0}, \ldots, \xi_{k_1,k_2}, \ldots) \in H(\mathbb{C}^2)$.

Отже, $\left(\xi, \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} a_{k_1,k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}\right) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} a_{k_1,k_2} \xi_{k_1,k_2}$ тоді і тільки тоді, коли $\sup \sqrt[k_1+k_2]{|\xi_{k_1,k_2}|} < \infty$, а це буде тоді і тільки тоді коли $\sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} \frac{\xi_{k_1,k_2}}{k_1!k_2!} t_1^{k_1} t_2^{k_2}$ – функція експоненціального типу. Отже φ є функцією експоненціального типу.

Висновки

1. Проведено аналіз спектру алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на банановому просторі $\ell_1 \oplus \ell_\infty$.

2. Показано, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ не збігається з множиною класів еквівалентності функціоналів значення в точках.

3. Доведено, що кожен характер алгебри $\hat{H}(\ell_1 \oplus \ell_\infty)$ є функцією експоненціального типу.

Список використаних джерел / References

1. Weyl H. The Classical Groups: Their Invariants and Representations; Princeton University Press: Princenton, NJ, USA, 1973.

2. Macdonald I.G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials; University Lecture Series, 12; AMS: Providence, RI, USA, 1998.

3. Nemirovskii A.S., Semenov S.M. On Polynomial Approximation of Functions on Hilbert *Space. Math. USSR*-Sb.1973. Vol. 21. P.255–277. DOI: 10.1070/SM1973v021n02ABEH002016

4. González M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces. *J. Lond. Math. Soc*. 1999. Vol. 59. P. 681–697. DOI: 10.1112/S0024610799007164.

5. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on `p. Bull. *Lond. Math. Soc*. 2003. Vol. 35.P. 55–64.

6. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra. *Proc. Edinb. Math. Soc*. 2012. Vol. 55. P.125–142. DOI: 10.1017/S0013091509001655.

7. Chernega, I., Galindo, P., Zagorodnyuk, A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 2012. Vol. 395. P. 569–577. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.04.087

8. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions. *Rev. Mat. Complut.*2014. Vol. 27. P. 575–585. 33. DOI:10.1007/s13163-013-0128-0

9. Chernega I.V., Zagorodnyuk A.V. Note on bases in algebras of analytic functions on Banach spaces. *Carpathian Math. Publ*. 2019. Vol.11. P. 42–47. DOI: doi.org/10.15330/cmp.11.1.42-47.

10. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic Basis of the Algebra of All Symmetric Continuous Polynomials on the Cartesian Product of ℓp-Spaces. *Axioms*.2022. Vol. 11(2). P. 41. DOI: 10.3390/axioms11020041

11. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(C^n)$. *J. Funct. Spaces*. 2017. Vol.2017. P.1-8. DOI: 10.1155/2017/4947925

12. Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type. *Mat. Stud*. 2022. Vol. 58. P. 69–81.

13. Kravtsiv V.V. Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on $\ell_1 \oplus \ell_\infty$. *Carpathian Math. Publ*. 2019. Vol. 11. P. 89–95. DOI: 10.15330/cmp.11.1.89-95.

14. Harold P. Boas, Khavinson D. Bohr's power series theorem in several variables. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1997. Vol. 125. No. 10. pp. 2975-2979.

SPECTRUM OF THE ALGEBRA OF BLOCK-SYMMETRIC ANALYTICAL FUNCTIONS IN SPACE $\ell_1 \oplus \ell_\infty$

V.V. Kravtsiv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
57 Shevchenko St., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine;
e-mail: *viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua*