

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ, ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТА ДИСКРЕТНІ СТРУКТУРИ

УДК 519.2

DOI 10.31471/1993-9981-2024-2(53)-105-113

КРИТИЧНИЙ ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

В. В. Кравців, М. В. Марцінків, Т. В. Вівчар

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;

вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна; e-mail:

viktoria.kravtsiv@pnu.edu.ua, maria.martsinkiv@pnu.edu.ua, tetiana.vivchar.21@pnu.edu.ua

Проведено комплексний аналіз математичних моделей, що широко використовуються в економічній теорії для моделювання попиту, виробництва та економічного зростання. Зокрема, показано застосування еластичності як економічного змісту похідної для побудови виробничої функції та її застосування до моделей дослідження економічного зростання. Особлива увага приділяється обмеженням та викликам, з якими стикаються дослідники при розробці та впровадженні моделей. Моделі, які розглядаються, є потужними інструментами для вивчення економічних процесів, однак кожна з них має як сильні, так і слабкі сторони, що визначають їх ефективність і можливості застосування в різних умовах. Математична частина кожної з моделей надає чітке уявлення про структуру економічних процесів і дозволяє здійснювати кількісний аналіз. Проте всі ці моделі базуються на математичних формулах та певних припущеннях і спрощеннях, які можуть обмежувати їхню застосовність у реальних економічних умовах. У статті також розглядається важливість вибору правильних математичних методів для аналізу цих моделей. Важливим є підхід до адаптації параметрів моделей для реальних умов, що часто вимагає модифікації математичних виразів і врахування додаткових факторів. У зв'язку з цим важливою є роль чисельних методів для знаходження розв'язків складних систем рівнянь, а також використання методів оптимізації та апроксимації для досягнення більш точних результатів. Незважаючи на численні переваги, математичні моделі економічних процесів мають певні обмеження. Їх застосування у реальному світі часто вимагає врахування множинних зовнішніх змінних, які можуть не входити до базових математичних структур моделей. Однак для теоретичних досліджень та побудови початкових оцінок ці моделі є ефективними інструментами для розуміння та прогнозування економічних процесів. У підсумку, усі моделі мають важливі застосування, але для їх максимальної ефективності необхідно коригувати їх під реальні економічні умови, доповнювати новими змінними та враховувати динамічність економічних процесів.

Ключові слова: еластичність, виробнича функція, модель економічного зростання.

The article provides a comprehensive analysis of mathematical models widely used in economic theory to model demand, production, and economic growth. In particular, it demonstrates the application of elasticity, as the economic meaning of a derivative, for constructing a production function and its application to models of economic growth research. Special attention is given to the limitations and challenges faced by researchers when developing and implementing these models. The models discussed are powerful tools for studying economic processes, but each has both strengths and weaknesses that determine their effectiveness and applicability under different conditions. The mathematical component of each model provides a clear understanding of the structure of economic processes and allows for quantitative analysis. However, all these models are based on mathematical formulas and certain assumptions and simplifications, which may limit their applicability in real-world economic conditions. The article also addresses the importance of choosing the correct mathematical methods for analyzing these models. An important aspect is the approach to adapting model parameters to real conditions, which often requires modifications to mathematical expressions and consideration of additional factors. In this context, the role of numerical methods in solving complex systems of equations, as well as the use of optimization and approximation techniques to achieve more accurate results, is emphasized. Despite numerous advantages, mathematical models of economic processes have certain limitations. Their application in the real world often requires accounting for multiple external variables that may not be included in the basic mathematical structures of the models. However, for theoretical research and

the construction of initial estimates, these models are effective tools for understanding and predicting economic processes. In conclusion, all models have important applications, but to maximize their effectiveness, they need to be adjusted to real economic conditions, supplemented with new variables, and account for the dynamic nature of economic processes.

Keywords: elasticity, production function, economical growth model.

Вступ

Математичні моделі є невід'ємною частиною сучасного аналізу та вирішення економічних задач. Вони дозволяють описати складні економічні процеси, передбачити їх розвиток та оптимізувати різноманітні аспекти економічної діяльності. Застосування математичних методів у економіці дає змогу не лише уточнити теоретичні уявлення про ринкові механізми, але й розробити ефективні стратегії управління для підприємств, урядів та міжнародних організацій.

Математичні моделі в економіці виконують роль важливих інструментів для прогнозування, оптимізації та прийняття рішень у таких сферах, як фінанси, ціноутворення, управління ризиками, макроекономічне планування і багато інших. Вони допомагають виявити закономірності в складних економічних системах, оцінити наслідки різних економічних політик і сценаріїв. Моделювання є важливим засобом для систематизації даних, забезпечення їх точності та надійності, а також для підтримки прийняття зважених рішень у нестабільних умовах [1-5].

У цій статті ми розглянемо основні підходи до використання математичних моделей для вирішення економічних задач, зокрема, типи моделей, їх застосування, а також основні проблеми і обмеження, які можуть виникати під час їх розробки та впровадження.

Модель еластичності попиту

Модель еластичності попиту описує, як змінюється кількість товару, який споживачі готові придбати, у відповідь на зміну ціни цього товару. Еластичність попиту є важливим економічним показником, який дозволяє оцінити чутливість попиту до змін у цінах і допомагає в прийнятті рішень про

ціноутворення, прогнозуванні попиту та оцінці ефективності економічної політики.

Визначення еластичності попиту:

Еластичність попиту за ціною (E_d) визначається як відсоткова зміна кількості попиту (ΔQ) на товар у відповідь на відсоткову зміну ціни (ΔP). Формула виглядає так:

$$E_d = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta P},$$

де E_d — коефіцієнт еластичності попиту, $\% \Delta Q$ — відсоткова зміна кількості попиту, $\% \Delta P$ — відсоткова зміна ціни.

Типи еластичності попиту:

Еластичний попит ($E_d > 1$): Якщо попит є еластичним, це означає, що споживачі значно реагують на зміну ціни, і зниження ціни призведе до значного зростання попиту.

Нееластичний попит ($E_d < 1$): Якщо попит нееластичний, це означає, що зміна ціни не сильно впливає на кількість товару, який споживачі готові придбати. Наприклад, на основні товари чи ліки попит може бути нееластичним.

Одинична еластичність ($E_d = 1$): Це випадок, коли відсоткова зміна ціни точно компенсується відсотковою зміною попиту, тобто зміна ціни пропорційно змінює попит.

Абсолютно еластичний попит ($E_d = \infty$): Це теоретичний випадок, при якому навіть найменша зміна ціни призводить до нескінченно великої зміни попиту.

Абсолютно нееластичний попит ($E_d = 0$): У цьому випадку попит зовсім не змінюється незалежно від змін ціни, що характерно для товарів першої необхідності.

Фактори, що впливають на еластичність попиту:

Наявність замінників: Якщо є багато замінників товару, попит на нього буде еластичним. Навпаки, якщо замінників мало або немає, попит буде нееластичним.

Часовий фактор: Зазвичай попит є більш еластичним у довгостроковій перспективі, оскільки споживачі мають більше часу для адаптації.

Необхідність товару: Для товарів першої необхідності попит є нееластичним, оскільки споживачі повинні їх купувати незалежно від зміни ціни.

Вартість товару у загальному бюджеті споживача: Для товарів з високою ціною попит зазвичай є більш еластичним, оскільки зміна ціни має більший вплив на бюджет споживача.

Модель еластичності попиту допомагає підприємствам та урядам передбачати, як зміни в цінах впливатимуть на споживчі звички, а також на доходи від продажу товарів та послуг. Модель еластичності попиту в математичному вираженні дозволяє швидко оцінити чутливість попиту до зміни ціни, однак її обмеження полягають у тому, що вона не враховує зміни в інших факторах, таких як доходи споживачів, зміни в пропозиції або зовнішньоекономічні впливи. Сильним моментом є її простота, що дозволяє швидко обчислювати еластичність, але обмеженням є спрощення реальних економічних взаємозв'язків.

Модель виробничої функції Кобба-Дугласа

Модель виробничої функції – це економічна модель, яка описує залежність між кількістю використовуваних факторів виробництва (капіталу і праці) і обсягом виробленого продукту. Вона є однією з найбільш визнаних і використовуваних виробничих функцій в економічному аналізі [6-7].

Модель виробничої функції Кобба-Дугласа [8-12] виражається наступним чином:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

де Q – обсяг виробленої продукції (output), A – технологічний коефіцієнт або ефективність виробництва, що відображає рівень технологій, L – кількість праці (input), K – кількість капіталу (input), α, β – еластичності відповідно щодо праці і капіталу (параметри, що відображають вплив кожного фактора на продукцію).

Капітал (K) — це всі інвестиції в технічне оснащення, інфраструктуру, обладнання та інші матеріальні ресурси, які використовуються у виробництві.

Праця (L) — це людський ресурс, який використовують для виробництва товарів або послуг.

Технологічний коефіцієнт (A) — цей параметр показує, наскільки ефективно комбінуються капітал і праця в процесі виробництва. Вищі значення AAA відображають більш ефективні технології виробництва.

Еластичності (α, β) — це параметри, які показують, як змінюється обсяг виробництва при зміні одного з факторів при фіксованому значенні іншого.

Особливості моделі Кобба-Дугласа [13-15]:

Постійні масштаби виробництва: якщо сума параметрів α, β дорівнює 1 ($\alpha + \beta = 1$), це означає, що виробнича функція має постійні масштаби. Тобто, якщо всі фактори виробництва збільшуються на певний коефіцієнт, то і обсяг виробництва збільшиться на такий самий коефіцієнт.

Якщо $\alpha + \beta < 1$, це означає, що масштаби зменшуються (умовно знижена ефективність при збільшенні обсягів).

Якщо $\alpha + \beta > 1$, це вказує на збільшення масштабів (вища ефективність при збільшенні обсягів).

Еластичність заміщення: модель передбачає, що капітал і праця можуть замішувати один одного, але з певними обмеженнями. Наприклад, збільшення кількості праці може замінити частину капіталу, і навпаки, але цей ефект зазвичай не є нескінченним.

Сумісна продуктивність праці і капіталу: визначення того, як зміна одного з факторів виробництва впливає на виробництво, залежить від значень параметрів α, β . Наприклад, якщо $\alpha > \beta$, це означає, що збільшення праці має більший ефект на продукцію порівняно з збільшенням капіталу.

Модель Кобба-Дугласа [16-20] широко використовується для оцінки ефективності виробництва, прогнозування економічного зростання та визначення оптимальних інвестицій в капітал і працю. Вона дозволяє аналізувати:

Виробничу ефективність: оцінюючи, як технології (A) і фактори виробництва (L, K) взаємодіють, можна виявити можливості для підвищення продуктивності.

Зростання економіки: за допомогою цієї моделі можна прогнозувати зростання на основі зміни в капіталі, праці та технологіях.

Визначення еластичності факторів: модель допомагає зрозуміти, як зміна одного з факторів впливає на загальний обсяг продукції.

Переваги моделі:

Простота: модель є відносно простим способом аналізу виробництва і дозволяє легко визначати важливі економічні параметри.

Гнучкість: модель дозволяє вводити різні значення параметрів для конкретних виробничих умов.

Застосовність у багатьох галузях: від сільського господарства до виробництва товарів та послуг.

Недоліки моделі:

Спрощення реальності: модель передбачає постійну технологічну ефективність (A), що не завжди відповідає реальному світу, де технології можуть змінюватися.

Неврахування зовнішніх факторів: Модель не враховує зміни в економічних умовах або зовнішніх шоках, таких як політичні зміни чи природні катастрофи.

Модель Кобба-Дугласа [21-24] є важливим інструментом в економічному

аналізі і допомагає зрозуміти, як оптимально використовувати ресурси для досягнення максимального виробництва. Модель виробничої функції Коба-Дугласа є класичною математичною моделлю, яка дозволяє аналізувати залежність між виробничими факторами, такими як капітал і праця, та обсягом виробництва. Її математична структура є простою та зручною для аналізу, однак модель передбачає сталу еластичність та технологічний прогрес, що обмежує її застосування в умовах динамічних змін. Вона не враховує змін у відносних цінах факторів виробництва, що може призвести до спрощення реальних виробничих процесів.

Модель економічного зростання Домара

Модель економічного зростання Домара [11] була розроблена економістом Евсеєвим Домаром у 1946 році та є варіантом більш загальної теорії економічного зростання. Вона ґрунтується на простій залежності між заощадженнями, інвестиціями та зростанням національного доходу.

Модель Домара [25-26] спирається на кілька основних ідей:

Збереження пропорцій: вона передбачає, що всі інвестиції спрямовуються на розширення капіталу.

Відсутність технологічного прогресу: У найпростішому варіанті модель не враховує зміни в технологіях і продуктивності праці.

Постійна норма заощаджень: Передбачається, що частина національного доходу, яка заощаджується, є сталою.

Модель може бути виражена у вигляді наступного рівняння:

$$Y = C + I,$$

де Y – національний дохід (обсяг виробництва), C – споживчі витрати, I – інвестиції.

Норма заощаджень s є частиною доходу, яку економіка заощаджує, тобто: $S = sY$.

Загальна інвестиційна функція виглядає так:

$$I = S = sY.$$

Тепер, якщо припустити, що збільшення капіталу K залежить від інвестицій, ми можемо виразити рівняння зростання як:

$$\dot{K} = I - \delta K,$$

де K – капітал, I – інвестиції, δ – норма амортизації капіталу.

Тепер можемо визначити, що темпи економічного зростання g можна виразити

як $g = \frac{s}{\delta}$. Тобто, темпи економічного

зростання прямо пропорційні нормі заощаджень s і обернено пропорційні нормі амортизації капіталу δ .

Ключові висновки з моделі Домара

Основним фактором економічного зростання є рівень заощаджень, які стають інвестиціями, що дозволяють збільшити капітальний фонд.

Для стабільного зростання важливо мати високий рівень інвестицій, оскільки вони прямо впливають на капітальний фонд, що необхідний для виробництва.

Модель економічного зростання Солоу

Модель економічного зростання Роберта Солоу [27-28] була розроблена в 1956 році і є більш комплексною та реалістичною, оскільки включає не тільки заощадження та інвестиції, а й технологічний прогрес і зміни в продуктивності праці. Це значно покращує здатність моделі описувати реальні економічні процеси.

Основні припущення та структура

Технологічний прогрес: модель Солоу передбачає, що економіка може зростати завдяки не тільки збільшенню капіталу, а й через покращення технологій, які дозволяють використовувати ресурси ефективніше. Технології ростуть за законом

$$A(t) = A_0 e^{gt},$$

де g – темп зростання технології.

Накопичення капіталу: капітал у моделі збільшується за рахунок інвестицій, які становлять частку від виробленого

випуску. Ставка накопичення капіталу (або заощаджень) дорівнює s . Математично це записується так:

$$\dot{K} = sY - \delta K,$$

де $\dot{K}$ – зміна капіталу, sY – інвестиції (заощадження), δ – ставка амортизації капіталу.

Зростання робочої сили (L): чисельність робочої сили зростає з постійним темпом n , тобто:

$$L(t) = L_0 e^{nt}.$$

Стійкість (усталений стан): модель Солоу передбачає, що в довгостроковій перспективі економіка досягає сталого стану, у якому темпи зростання капіталу, праці та випуску стабілізуються. Це означає, що економіка врешті-решт припиняє рости через спадаючу віддачу від капіталу, і зростання на душу населення та на душу капіталу буде можливим лише за рахунок технологічного прогресу.

Виробнича функція Кобба-Дугласа (уточнена): Це стандартне припущення для моделі Солоу, де обсяг виробництва Y залежить від капіталу K і праці L :

$$Y = AL^{1-\alpha} K^\alpha,$$

де A – рівень технологічного прогресу, K – капітал, L – праця, α – коефіцієнт еластичності.

Амортизація капіталу: знову ж таки, капітал зношується, тому потрібно постійно інвестувати для його оновлення.

Динаміка капіталу:

$$\dot{K} = I - \delta K,$$

де I – інвестиції, а δK – амортизація капіталу.

Довгострокова рівновага: в довгостроковій перспективі темп зростання випуску і капіталу на душу населення буде залежати лише від темпу зростання технологій і чисельності робочої сили:

$$g_Y = g_A + n$$

де g_Y – темп зростання випуску на душу населення, g_A – темп зростання технологій, n – темп зростання робочої сили.

Основні висновки з моделі Солоу [29-30]

Короткостроковий ефект від збільшення заощаджень: збільшення норми заощаджень призводить до зростання капіталу і випуску в короткостроковій перспективі. Однак через закон спадної віддачі ефект від цього зростання поступово зменшується.

Довгостроковий ріст через технологічний прогрес: в довгостроковій перспективі сталий економічний ріст можливий лише за рахунок технологічного прогресу, оскільки після досягнення сталого стану капітал на душу населення і випуск на душу населення стабілізуються.

Роль накопичення капіталу: на початкових етапах економічного розвитку збільшення інвестицій (накопичення капіталу) відіграє ключову роль, але в довгостроковій перспективі його вплив на ріст економіки стає менш значущим.

Стан сталого зростання: економіка прагне до стану сталого зростання, де всі основні економічні змінні (випуск, капітал, робоча сила) зростають з темпом, визначеним технологічним прогресом та зростанням робочої сили.

Негативні сторони моделі

Відсутність урахування людського капіталу: модель не враховує людський капітал, який також відіграє важливу роль в економічному зростанні.

Не враховує інституційні фактори: модель не пояснює, як економічні інститути, державна політика або міжнародна торгівля впливають на довгостроковий ріст.

Моделює технології як зовнішній фактор: технологічний прогрес у моделі розглядається як екзогенний процес (який не залежить від інших факторів), хоча на практиці технологічні зміни часто залежать від інвестицій у науку та інновації.

Порівняння моделей Домара та Солоу

Технологічний прогрес: модель Солоу включає технологічний прогрес, що робить її більш динамічною в довгостроковій перспективі. Модель Домара не враховує змін у технологіях.

Роль капіталу: у моделі Домара капітал є основним фактором зростання, тоді як у моделі Солоу, хоча капітал також важливий, але є ефект спадної доходності, і з часом основним фактором стає технологічний прогрес.

Стаціонарний стан: модель Солоу передбачає досягнення стаціонарного стану, тоді як модель Домара вказує на постійне зростання, залежне від інвестицій.

Модель Солоу є більш складною і враховує більше факторів, що дозволяє отримати більш точне уявлення про довгострокове економічне зростання, ніж модель Домара.

Моделі економічного зростання Домара та Солоу є класичними підходами до аналізу довгострокового економічного зростання, і кожна з них фокусується на різних аспектах розвитку економіки, зокрема на факторах, що впливають на темпи зростання виробництва [31-32].

Моделі економічного зростання Домара і Солоу використовуються для вивчення динаміки економічного зростання на основі інвестицій і накопичення капіталу. Математичні вирази цих моделей дозволяють оцінити, як зміни в інвестиціях або заощадженнях можуть вплинути на економічне зростання. Модель Домара, зокрема, має значну простоту, що дозволяє легко здійснювати розрахунки, однак вона не враховує технологічний прогрес, що є суттєвим недоліком у сучасних економічних умовах. Модель Солоу, в свою чергу, додає параметр технологічного прогресу, але її використання обмежене припущенням про постійну відносну ефективність факторів виробництва, що може не відповідати реальним умовам.

Список використаних джерел

1. Білоцерківський О.Б., Ширяєва Н.В., Замула О.О. Економіко-математичне моделювання: Текст лекцій. Харків: НТУ «ХП», 2010. 108 с.
2. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. Київ: КНЕУ, 2003. 408 с.
3. Вовк В.М., Зомчак Л.М. Оптимізаційні моделі економіки Навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 318 с.
4. Дацко М.В., Карбовник М.В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. Львів: ПАІС, 2009. 288 с.
5. Івашук О.Т. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
6. Середюк В.Б. Застосування економіко-математичних методів для розв'язання економічних задач. *Вісник соціально-економічних досліджень*. 2014. Вип. 1 (52). С. 69-73.
7. Янковий В.О. Економіко-математичні властивості виробничої функції Кобба-Дугласа і CES-функції. *Східна Європа: Економіка, бізнес та управління*. 2017. Випуск 2 (07). С. 330-336.
8. Aum Sangmin Why Is the LaborShare Declining? *Review*. 2020. Vol. 102 (4). P. 413-428. DOI: [10.20955/r.102.413-28](https://doi.org/10.20955/r.102.413-28)
9. Barro Robert J., Sala-i-Martin Xavier. Economic growth. The MIT Press, 2004. p. 29, fn. 7.
10. Berndt Ernst R., Christensen Laurits R. The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. manufacturing 1929–68. *Journal of Econometrics*. 1973. Vol. 1 (1). P. 81–113. DOI: [10.1016/0304-4076\(73\)90007-9](https://doi.org/10.1016/0304-4076(73)90007-9)
11. Boianovsky M. Modeling economic growth: Domar on moving equilibrium CHOPE Working Paper. 2015. № 10. DOI: [10.2139/ssrn.2664149](https://doi.org/10.2139/ssrn.2664149)
12. Brown Murray "Cobb–Douglas Functions". The New Palgrave Dictionary of Economics. Palgrave Macmillan UK. 2017. P. 1–4. DOI: [10.1057/978-1-349-95121-5_480-2](https://doi.org/10.1057/978-1-349-95121-5_480-2)
13. Czerwinski A. Mathematics Serving Economics: A Historical Review of Mathematical Methods in Economics. *Symmetry*. 2024. Vol. 16(10), 1271. DOI: [10.3390/sym16101271](https://doi.org/10.3390/sym16101271)
14. Cobb C. W., Douglas, P. H. A Theory of Production. *American Economic Review*. 1928. Vol. 18. P. 139-165. JSTOR 1811556. Retrieved 26 September 2016.
15. Douglas Paul H. The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press. 1976. Vol. 84(5). P. 903-915.
16. Elsbj Michael, Hobijn Bart, Sahin Aysegül. The Decline of the U.S. Labor Share (Report). Federal Reserve Bank of San Francisco. Brookings Papers on Economic Activity, Fall 2013.
17. Filipe Jesus, Adams F. Gerard. The Estimation of the Cobb-Douglas Function: A Retrospective View. *Eastern Economic Journal*. 2005. Vol. 31 (3). P. 427–445.
18. Gechert Havranek, Irsova Kolcunova Measuring capital-labor substitution: The importance of method choices and publication bias. *Review of Economic Dynamics*. 2021. Vol. 45. P. 55–82. DOI: [10.1016/j.red.2021.05.003](https://doi.org/10.1016/j.red.2021.05.003)
19. Hájková Dana, Hurník Jaromír. Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy. *Czech Journal of Economics and Finance (Finance a User)*. 2006. Vol. 57 (9–10) P. 465–476.
20. Hoch Irving. Simultaneous Equation Bias in the Context of the Cobb-Douglas Production Function. *Econometrica*. 1958. Vol. 26 (4). P. 566–578. DOI: [10.2307/1907517](https://doi.org/10.2307/1907517)
21. Houthakker H.S. The Pareto Distribution and the Cobb–Douglas Production Function in Activity Analysis. *The Review of Economic Studies*. 1955. Vol. 23 (1). P. 27–31. DOI: [10.2307/2296148](https://doi.org/10.2307/2296148)
22. Jacques Ian. Mathematics for Economics and Business (Ninth ed.). Harlow, United Kingdom: Pearson Education, 2018. 168 p.

23. Malcolm Pemberton and Nicholas Rau. Mathematics for economists: An introductory textbook, 4th ed. Manchester: Manchester University Press. 2015.

24. Nechyba Thomas J. Microeconomics : an intuitive approach with calculus (2nd ed.). Boston, MA: Cengage Learning. 2017. p. 126.

25. Silberberg Eugene, Suen, Wing. Elasticity of Substitution. The Structure of Economics: A Mathematical Analysis (Third ed.). Boston: Irwin McGraw-Hill. 2001. P. 246–247.

26. Smirnov R., Wang K. The Hamiltonian approach to the problem of derivation of production functions in economic growth theory. 2019. DOI: [10.48550/arXiv.1906.11224](https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.11224)

27. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*. 1956. Vol. 70. No 1. P. 65–94.

28. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*. 1957. Vol. 39, No 3. P. 312–320.

29. Uzawa H. Models of Growth . The New Palgrave Dictionary of Economics. Macmillan Publishers Ltd. London: Palgrave Macmillan UK, 2018. P. 8885–8893

30. Varian Hal. Microeconomic Analysis (Third ed.). New York: Norton. 1992.

31. Walsh Carl. Monetary Theory and Policy (2nd ed.). Cambridge: MIT Press. 2003.

32. Wynn R. F., Holden K. An Introduction to Applied Econometric Analysis. New York: Halsted Press, 1974. pp. 62–65.

References

1. Bilotserkivskyi O.B., Shyriaieva N.V., Zamula O.O. Ekonomiko-matematychne modeliuвання: Tekst leksii. Kharkiv: NTU «KhPI», 2010. 108 p. [in Ukrainian]

2. Vitlinskyi V.V. Modeliuвання ekonomiky: Navch. posibnyk. Kyiv: KNEU, 2003. 408 p. [in Ukrainian]

3. Vovk V.M., Zomchak L.M. Optymizatsiini modeli ekonomiky Navch. posibnyk. Lviv: LNU imeni Ivana Franka, 2013. 318 p. [in Ukrainian]

4. Datsko M.V., Karbovnyk M.V. Doslidzhennia operatsii v ekonomitsi: navch. posib. Lviv: PAIS, 2009. 288 p. [in Ukrainian]

5. Ivashchuk O.T. Ekonomiko-matematychne modeliuвання: Navchalnyi posibnyk. Ternopil: TNEU «Ekonomichna dumka», 2008. 704 p. [in Ukrainian]

6. Serediuk V.B. Zastosuvannia ekonomiko-matematychnykh metodiv dlia rozviazannia ekonomichnykh zadach. Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen. 2014. Vol. 1 (52). P.69-73. [in Ukrainian]

7. Iankovyi V.O. Ekonomiko-matematychni vlastyvoli vyrobnychoi funktsii Kobba-Duhlasa i CES-funktsii. Skhidna Yevropa: *Ekonomika, biznes ta upravlinnia*. 2017. Vol. 2 (07). P. 330-336. [in Ukrainian]

8. Aum Sangmin Why Is the LaborShare Declining? *Review*. 2020. Vol. 102 (4). P. 413-428. DOI: [10.20955/r.102.413-28](https://doi.org/10.20955/r.102.413-28)

9. Barro Robert J., Sala-i-Martin Xavier. Economic growth. The MIT Press, 2004. p. 29, fn. 7.

10. Berndt Ernst R., Christensen Laurits R. The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. manufacturing 1929–68. *Journal of Econometrics*. 1973. Vol. 1 (1). P. 81–113. DOI: [10.1016/0304-4076\(73\)90007-9](https://doi.org/10.1016/0304-4076(73)90007-9)

11. Boianovsky M. Modeling economic growth: Domar on moving equilibrium *CHOPE Working Paper*. 2015. No 10. DOI: [10.2139/ssrn.2664149](https://doi.org/10.2139/ssrn.2664149)

12. Brown Murray. "Cobb–Douglas Functions". The New Palgrave Dictionary of Economics. Palgrave Macmillan UK. 2017. P. 1–4. DOI: [10.1057/978-1-349-95121-5_480-2](https://doi.org/10.1057/978-1-349-95121-5_480-2)

13. Czerwinski A. Mathematics Serving Economics: A Historical Review of Mathematical Methods in Economics. *Symmetry*. 2024. Vol. 16(10), 1271. DOI: [10.3390/sym16101271](https://doi.org/10.3390/sym16101271)

14. Cobb C. W., Douglas, P. H. A Theory of Production. *American Economic Review*. 1928. Vol. 18. P. 139-165. JSTOR 1811556. Retrieved 26 September 2016.

15. Douglas Paul H. The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press. 1976. Vol. 84(5). P. 903-915.
16. Elsby Michael, Hobijn Bart, Sahin Aysegül. The Decline of the U.S. Labor Share (Report). Federal Reserve Bank of San Francisco. Brookings Papers on Economic Activity, Fall 2013.
17. Filipe Jesus, Adams F. Gerard. The Estimation of the Cobb-Douglas Function: A Retrospective View. *Eastern Economic Journal*. 2005. Vol. 31 (3). P. 427-445.
18. Gechert Havranek, Irsova Kolcunova Measuring capital-labor substitution: The importance of method choices and publication bias. *Review of Economic Dynamics*. 2021. Vol. 45. P. 55-82. DOI: [10.1016/j.red.2021.05.003](https://doi.org/10.1016/j.red.2021.05.003)
19. Hájková Dana, Hurník Jaromír. Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy. *Czech Journal of Economics and Finance (Finance a User)*. 2006. Vol. 57 (9-10) P. 465-476.
20. Hoch Irving. Simultaneous Equation Bias in the Context of the Cobb-Douglas Production Function. *Econometrica*. 1958. Vol. 26 (4). P. 566-578. DOI: [10.2307/1907517](https://doi.org/10.2307/1907517)
21. Houthakker H.S. The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis. *The Review of Economic Studies*. 1955. Vol. 23 (1). P. 27-31. DOI: [10.2307/2296148](https://doi.org/10.2307/2296148)
22. Jacques Ian. Mathematics for Economics and Business (Ninth ed.). Harlow, United Kingdom: Pearson Education, 2018. 168 p.
23. Malcolm Pemberton and Nicholas Rau. Mathematics for economists: An introductory textbook, 4th ed. Manchester: Manchester University Press. 2015.
24. Nechyba Thomas J. Microeconomics : an intuitive approach with calculus (2nd ed.). Boston, MA: Cengage Learning. 2017. p. 126.
25. Silberberg Eugene, Suen, Wing. Elasticity of Substitution. The Structure of Economics: A Mathematical Analysis (Third ed.). Boston: Irwin McGraw-Hill. 2001. P. 246-247.
26. Smirnov R., Wang K. The Hamiltonian approach to the problem of derivation of production functions in economic growth theory. 2019. DOI: [10.48550/arXiv.1906.11224](https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.11224)
27. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*. 1956. Vol. 70. No 1. P. 65-94.
28. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*. 1957. Vol. 39, No 3. P. 312-320.
29. Uzawa H. Models of Growth. The New Palgrave Dictionary of Economics. Macmillan Publishers Ltd. London: Palgrave Macmillan UK, 2018. P. 8885-8893
30. Varian Hal. Microeconomic Analysis (Third ed.). New York: Norton, 1992.
31. Walsh Carl. Monetary Theory and Policy (2nd ed.). Cambridge: MIT Press. 2003.
32. Wynn R. F., Holden K. An Introduction to Applied Econometric Analysis. New York: Halsted Press. 1974. P. 62-65.

A CRITICAL REVIEW OF MATHEMATICAL MODELS OF ECONOMIC GROWTH

V. V. Kravtsiv, M. V. Martsinkiv, T. V. Vivchar

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
57 Shevchenko St., Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine;
e-mail: viktorii.kravtsiv@pnu.edu.ua,
maria.martsinkiv@pnu.edu.ua,
tetiana.vivchar.21@pnu.edu.ua