



Прийнято 31.03.2026. Прорецензовано 08.05.2026. Опубліковано 30.05.2026.

УДК 681.516.4

DOI: 10.31471/1993-9981-2026-1(56)-171-182

ОПТИМАЛЬНІ П/ПІ-РЕГУЛЯТОРИ ДЛЯ ОДНОКОНТУРНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Горбійчук М. І.

Доктор технічних наук, професор

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна

<https://orcid.org/0000-0002-8586-1883>

e-mail: mi_profgorb@ukr.net

Скріпка В. О.

студент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

01033, вул. Володимирська, 60, місто Київ, Україна

<https://orcid.org/0009-0009-9218-3740>

e-mail: skripkavlad6@knu.ua

Анотація. На теперішній час для автоматичного керування технологічними процесами в нафтогазовій промисловості широко застосовують промислові ПІ/ПІД-регулятори. Основною проблемою проектування систем автоматичного керування з ПІ/ПІД-регуляторами є визначення параметрів налаштування таких регуляторів, виходячи із умов стійкості і забезпечення необхідних показників якості процесу керування. Інший підхід до синтезу П/ПІ-регуляторів ґрунтується на використанні принципу максимуму з квадратичним критерієм якості процесу керування. Така задача успішно вирішується для багатовимірних систем, які мають однакову кількість входів і виходів, а об'єкт має властивість спостережливості. За таких умов отриманий алгоритм оптимального керування є функцією змінних стану об'єкта. При проектуванні одновимірних систем за принципом максимуму безпосередньо вимірюється тільки одна координата об'єкта (вихідна величина). Оскільки для синтезу оптимального П/ПІ-регулятора за принципом максимуму необхідно мати таку кількість ординат об'єкта (змінних стану), яка визначена порядком передавальної функції керованого об'єкта, то актуальною науковою задачею є визначення нових підходів до проектування оптимальних П/ПІ-регуляторів для одновимірних систем зі змінними стану об'єкта. Практичне значення роботи полягає у можливості впровадження розроблених алгоритмів у сучасні автоматизовані системи керування технологічними процесами компресорних станцій, установок підготовки газу, насосних агрегатів та інших промислових об'єктів. Це дозволить підвищити надійність роботи обладнання, зменшити енергоспоживання, скоротити витрати на експлуатацію та забезпечити стабільність технологічних параметрів у режимі реального часу. Застосування таких систем сприятиме цифровій трансформації підприємств нафтогазової промисловості та підвищенню конкурентоспроможності галузі в умовах сучасного розвитку промислової автоматизації.

Ключові слова: одновимірний об'єкт, модель, передавальна функція, критерій якості, П/ПІ-регулятор, рівняння Ріккати.

Запропоноване посилання: Горбійчук, М. І. & Скріпка, В. О. (2026). Оптимальні П/ПІ-регулятори для одноконтурної системи автоматичного керування. *Методи та прилади контролю якості*, 1(56), 171-182. doi: 10.31471/1993-9981-2026-1(56)-171-182

* Відповідальний автор



Вступ

Для керування різноманітними неперевірними технологічними процесами у переважній більшості випадків використовують промислові ПІ/ПІД-регулятори. Ефективна робота автоматичних систем керування в значній мірі залежить від вибору параметрів налаштування ПІ/ПІД-регулятора.

В одноконтурних системах зі зворотним зв'язком входною величиною регулятора є величина неузгодженості – різниця між величиною, яка визначає мету керування, і вихідною величиною. Параметри налаштування регулятора визначаються за певним критерієм, який забезпечує стійкість системи і залежить від параметрів передавальної функції об'єкта.

Інший підхід до проектування оптимальних регуляторів ґрунтується на математичному описі керованого об'єкта у просторі станів. Він виявився продуктивним, для об'єктів з повним спостереженням і при однаковій кількості входів-виходів.

Застосування такого підходу до одноконтурних систем має свої особливості, викликані необхідністю переходу від передавальних функцій до опису динамічних властивостей об'єкта у просторі станів.

У цьому плані є актуальним питанням порівняння ефективності методу синтезу регуляторів у просторі станів з методами, які орієнтовані на використанні узагальнених квадратичних критеріїв керування.

Мета роботи – синтез оптимальних ПІ/ПІД-регуляторів для одновимірного об'єкта за методом принципу максимуму та визначення шляхів їх технічної реалізації.

Огляд літературних джерел

Стійкість і якісні показники систем автоматичного керування визначаються як динамікою керованого об'єкта, так і залежать від параметрів налаштування ПІД/ПІ-регуляторів, які є найпоширенішими на теперішній час.

Параметри налаштування ПІД/ПІ-регуляторів визначаються типом передавальної функції лінеаризованої (лінійної) моделі об'єкта та вибраним критерієм якості процесу керування [1].

Критерії якості процесу керування, за якими обчислюють оптимальні параметри налаштування регуляторів є функціоналами похибки керування та керуючих дій. Для досягнення бажаних показників якості процесу керування таких як час наростання перехідного процесу, перерегулювання та час регулювання використовують цілий ряд критеріїв [2]: інтегральна абсолютна похибка (IAE); інтегральна квадратична похибка (ISE); абсолютна похибка інтегрального часу (ITAE); похибка інтегрального квадрату часу (ITSE); середня квадратична похибка (MSE); інтегральна похибка (IE). Методи, які використовують такі критерії для розрахунку параметрів налаштування регуляторів породжують задачі нелінійного програмування зі складною топологією цільових функцій, що викликає значні обчислювальні труднощі. Для подолання таких труднощів використовують крім класичних алгоритмів оптимізації [3] такі методи [4 – 10] як генетичні алгоритми, метод мурах, метод колонії кажанів, метод рою частинок. Практичне використання таких методів викликає певні труднощі через їх складність та вимагає високої кваліфікації дослідника. Тому не втратили свого практичного значення такі класичні методи як метод Зіглера-Ніколса (Ziegler Nichol's) і Коуена-Куна (Cohen Coon's) [10, 11], які вимагають для своєї реалізації експериментальних кривих розгону керованого об'єкта. Незважаючи на простоту і доступність такі методи мають обмежене застосування. Їх можна застосовувати для стійких об'єктів. Розмикання системи автоматичного керування для отримання кривої розгону може спричинити погіршення якості продукції і часткову втрату продуктивності установки.

В основі проектування систем автоматичного керування за станами об'єкта лежить квадратичний критерій [12]. Синтезоване за таким критерієм оптимальне керування представляє собою пропорційний закон керування з матричним коефіцієнтом, який є розв'язком рівняння Ріккати і є функцією часу [13]. Технічна реалізація такого закону керування викликає значні труднощі. Тому допускають, що невідома змінна в

рівнянні Ріккати постійна величина і в результаті отримують матричне нелінійне рівняння. Синтезований П-регулятор має ненульову статичну похибку, що є недоліком такого підходу.

Постановка задачі керування

Важливий клас задач оптимального керування складають так звані лінійні задачі з квадратичним критерієм, розв'язком яких є регулятори зі зворотнім зв'язком. У вітчизняній літературі відповідна методика одержала назву аналітичне конструювання оптимальних регуляторів (АКОР).

Динаміка одновимірного об'єкта описується передавальною функцією n -го порядку

$$W(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad (1)$$

Допускається, що $m = n$. У тому випадку, коли $m < n$, то коефіцієнти b_{m+1} , b_{m+2} , ..., b_n прирівнюються до нуля.

Реалізація методу АКОР ґрунтується на поданні динаміки об'єкта з передавальною функцією (1) у просторі станів [3]

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} + \beta_i u, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n a_{j-1} x_j + \beta_n u, \quad (3)$$

$$y = x_1 + \beta_0 u, \quad (4)$$

де u , y – вхідна і вихідна величини об'єкта.

Величини β_i , $i = \overline{0, n}$ обчислюють як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=i}^4 a_j \beta_{j-1} = b_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Будемо розв'язувати таку задачу: для об'єкта з передавальною функцією (1) синтезувати оптимальний регулятор за умови, що інтегральний критерій

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\alpha y^2 + \chi u^2) dt \quad (5)$$

набуває мінімального значення.

Математичну модель об'єкта (2) – (4) подамо в матрично-векторній формі

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{\beta}u, \quad (6)$$

$$y = \bar{c}^T \bar{x} + \beta_0 u, \quad (7)$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & \dots & \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

З врахуванням значення y , яке визначено рівнянням (7), критерій оптимальності (5) набуде такого вигляду:

$$J(\bar{x}, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\bar{x}^T Q \bar{x} + 2\bar{S}^T \bar{x} u + r u^2) dt, \quad (8)$$

де $Q = \alpha \bar{c} \cdot \bar{c}^T$, $\alpha \beta_0 \bar{c} = \bar{S}$, $\alpha \beta_0^2 + \chi = r$.

Отже, знайдемо таке оптимальне керування \bar{u}^* , як функцію фазових координат \bar{x} , яке б мінімізувало критерій оптимальності (8) і задовольняло би диференціальному рівнянню (6). Розв'язок такої задачі дає змогу визначити алгоритм функціонування оптимального регулятора.

Алгоритм функціонування оптимального П-регулятора

Розв'язок поставленої задачі знайдемо, використавши принцип максимуму [14]. Утворимо функцію Гамільтона

$$K(\bar{x}, \bar{\psi}, u) = -\frac{1}{2} (\bar{x}^T Q \bar{x} + 2\bar{S}^T \bar{x} u + r u^2) + \bar{\psi}^T (A\bar{x} + \bar{\beta}u), \quad (9)$$

яка при фіксованих значеннях змінних стану \bar{x} і спряжених змінних $\bar{\psi}$ повинна набути максимального значення. Оскільки на керуючу дію u не накладено жодних обмежень, то оптимальне значення u^* знайдемо із умови

$$\frac{\partial K(\bar{x}, \bar{\psi}, u)}{\partial u} = 0.$$

Необхідні умови існування максимуму функції Гамільтона (9) дали такий результат:

$$-\bar{S}^T \bar{x} - ru + \bar{\beta}^T \bar{\psi} = 0.$$

Із отриманого рівняння знаходимо

$$u^* = r^{-1} (\bar{\beta}^T \bar{\psi} - \bar{S}^T \bar{x}). \quad (10)$$

Оптимальне керування u^* синтезуємо в класі лінійних регуляторів, тобто

$$\bar{\psi} = -P\bar{x}, \quad (11)$$

де P - симетрична додатно означена матриця розміром $n \times n$

Після підстановки (11) в (10), отримали

$$u^* = -r^{-1} (\bar{\beta}^T P + \bar{S}^T) \bar{x}. \quad (12)$$

Формула (12) визначає пропорційний регулятор з матричним коефіцієнтом $K = -r^{-1} (\bar{\beta}^T P + \bar{S}^T)$, який є функцією матриці P .

Для знаходження матриці P запишемо рівняння для спряженої змінної [15]

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\frac{\partial K(\bar{x}, \bar{\psi}, u)}{\partial \bar{x}}, \bar{\psi}(t_f) = 0.$$

Оскільки функція Гамільтона $K(\bar{x}, \bar{\psi}, u)$ визначена формулою (8), то

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = Q\bar{x} + \bar{S}u - A^T \bar{\psi}. \quad (13)$$

Знайдемо похідну $\frac{d\bar{\psi}}{dt}$, використавши формулу (11)

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\frac{dP}{dt} \bar{x} - P \frac{d\bar{x}}{dt}.$$

Значення $\frac{d\bar{x}}{dt}$ визначено лівою частиною рівняння (6). Тому

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\frac{dP}{dt} \bar{x} - P(A\bar{x} + \bar{\beta}u). \quad (14)$$

Формули (13) і (14) мають тотожні ліві частини, відповідно будуть рівними і праві їх частини, тобто

$$-\frac{dP}{dt} \bar{x} - P(A\bar{x} + \bar{\beta}u) = Q\bar{x} + \bar{S}u - A^T \bar{\psi}.$$

В отримане рівняння підставимо значення u і $\bar{\psi}$ із формул (10) і (11), що дасть такий результат:

$$-\frac{dP}{dt} \bar{x} + P(r^{-1} \bar{\beta} \bar{S}^T - A) \bar{x} + (r^{-1} \bar{S} \bar{\beta}^T - A^T) P \bar{x} + (r^{-1} P \bar{\beta} \bar{\beta}^T P + r^{-1} \bar{S} \bar{S}^T) \bar{x} = Q \bar{x}. \quad (15)$$

У рівнянні (15) $\bar{x} \neq 0$. Тому

$$\frac{dP}{dt} + P(A - r^{-1} \bar{\beta} \bar{S}^T) + (A^T - r^{-1} \bar{S} \bar{\beta}^T) P - r^{-1} P \bar{\beta} \bar{\beta}^T P = -(Q - r^{-1} \bar{S} \bar{S}^T).$$

Після введення позначень: $\tilde{A} = A - r^{-1} \bar{\beta} \bar{S}^T$, $\tilde{Q} = Q - r^{-1} \bar{S} \bar{S}^T$, приходимо до рівняння

$$\frac{dP}{dt} + P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - r^{-1} P \bar{\beta} \bar{\beta}^T P = -\tilde{Q}, \quad (16)$$

яке є рівнянням Ріккати.

Розв'язок рівняння (16) дає змогу визначити функцію $P(t)$ і відповідно матричний коефіцієнт регулятора, який буде функцією часу t . Практична реалізація алгоритму керування (12) викликає значні труднощі. Тому допускають, що P постійна величина і отримують алгебраїчне матричне рівняння

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - r^{-1} P \bar{\beta} \bar{\beta}^T P = -\tilde{Q}, \quad (17)$$

розв'язок якого дає змогу визначити матрицю P та знайти пропорційний алгоритм керування за формулою (12).

У роботі [16] розроблений метод визначення параметрів ПІ-регулятора за узагальненим інтегральним критерієм. Для даних, наведених у роботі [4], синтезуємо алгоритм керування за формулою (12) і отриманий результат порівняємо з відповідним результатом із роботи [16].

Динамічні властивості об'єкта характеризуються передавальною функцією

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (18)$$

Передавальної функції (18) поставимо у відповідність математичну модель об'єкта у просторі станів

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \beta_1 u, \quad (19)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \beta_2 u, \quad (20)$$

$$y = x_1 + \beta_0 u. \quad (21)$$

Отриману математичну модель подамо у матрично-векторній формі

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{\beta}u, \quad (22)$$

$$y = \bar{c}^T \bar{x} + \beta_0 u, \quad (23)$$

де $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}$, $\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Нехай [16]: $a_2 = 20$, $a_1 = 6$, $a_0 = 4$; $b_2 = 0$, $b_1 = 4$, $b_0 = 7$.

Невідомі величини β_0 , β_1 , β_2 визначимо із рівняння [5]

$$\bar{\beta}_f = A_f^{-1} \bar{b},$$

де $A_f = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\beta}_f = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Числовий розв'язок матричного рівняння (17) дав такий результат:

Матричний коефіцієнт регулятора

$$k_1 = 5.9366e-01 \quad k_2 = 9.0742e-01$$

У відповідності з формулою (12) матричний коефіцієнт визначає оптимальний алгоритм керування за критерієм (5), тобто

$$u = -K\bar{x},$$

де $K = [k_1 \quad k_2]$.

Оскільки $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, то

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2.$$

Отже, керуюча дія є функцією змінних стану об'єкта. Для передавальної функції (18) має місце співвідношення $m < n$. Це означає, що $\beta_0 = 0$ і у відповідності з рівнянням (4) $x_1 = y$. Друга змінна стану об'єкта можна отримати шляхом виконання операції диференціювання: $x_2 = \frac{dy}{dt}$. За допомогою технічних засобів операція диференціювання виконується числовими методами. При цьому виникають похибки зумовлені кроком дискретності і наявністю завад. Тому створимо структурну схему системи, в якій відсутня операція диференціювання.

Перетворимо рівняння (19) – (20) за Лапласом при нульових початкових умовах

$$sX_1(s) = X_2(s) + \beta_1 U(s),$$

$$sX_2(s) = -\frac{a_0}{a_2} X_1(s) - \frac{a_1}{a_2} X_2(s) + \beta_2 U(s),$$

$$Y(s) = X_1(s) + \beta_0 U(s).$$

Отримана система алгебраїчних рівнянь дає змогу знайти

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) + \frac{\beta_1}{s} U(s),$$

$$X_2(s) = -\frac{a_0}{a_2 s + a_1} X_1(s) + \frac{\beta_2 a_2}{a_2 s + a_1} U(s).$$

Використовуючи отримані формули для $X_1(s)$, $X_2(s)$ і $Y(s)$, побудували структурну схему одноконтурної системи керування (рис. 1).

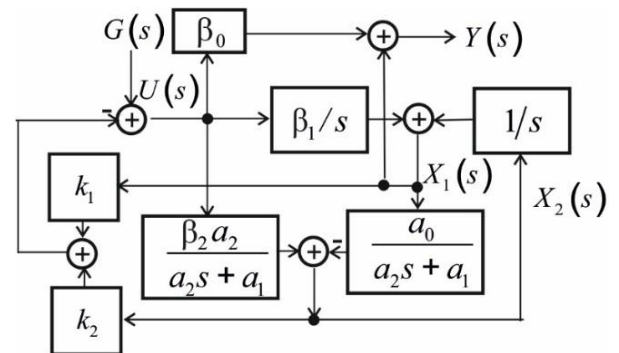


Рисунок 1 – Структурна схема системи автоматичного керування з оптимальним П-регулятором

На основі структурної схеми (рис. 1) у середовищі MatLab/Simulink синтезували імітаційну модель системи (рис. 2).

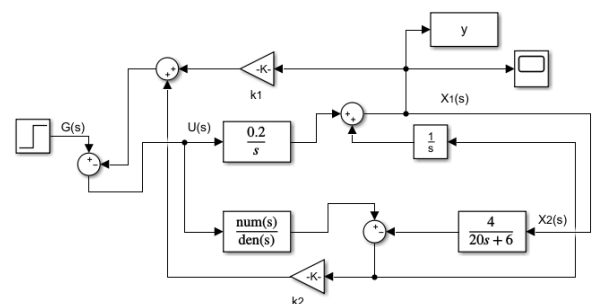


Рисунок 2 – Імітаційна модель системи автоматичного керування з оптимальним П-регулятором

В імітаційній моделі враховано, що для передавальної функції (18) $\beta_0 = 0$. Вагові коефіцієнти в критерії (8) були такими: $\alpha = 2,0$, $\chi = 2,5$.

Графік перехідної характеристики системи автоматичного керування з оптимальним П-регулятором зображені на рис. 3.

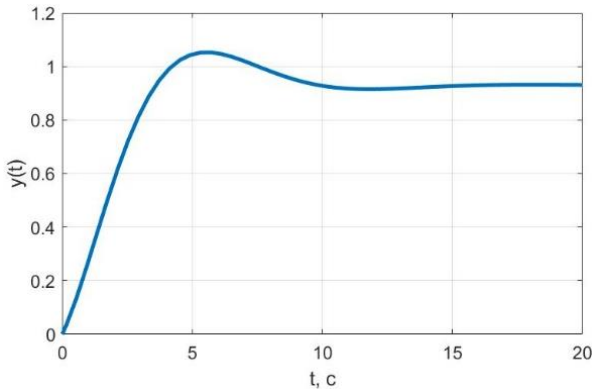


Рисунок 3 – Перехідні характеристики системи автоматичного керування з П-регулятором

Як показує рис. 3, П-регулятор відтворює вхідну величину (завдання регулятора) з статичною похибкою, відносна величина якої становить 5,23 %.

Статичну похибку можна звести до нуля, якщо для керування об'єктом застосувати ПІ-регулятор.

Синтез оптимального ПІ-регулятора

Синтез оптимального ПІ-регулятора виконали для об'єктів, передавальні функції яких мають порядок полінома чисельника менший за порядок полінома знаменника. Тоді $\beta_0 = 0$.

Для отримання ПІ-алгоритму керування в критерій оптимальності (8) потрібно ввести похідну $\bar{x}'(t)$. З цією метою розширимо простір станів, долучивши до нього інтегральну похибку керування

$$\frac{d\bar{x}_e}{dt} = g - y, \tag{24}$$

де g – постійна величина.

Тоді розширений простір станів буде характеризуватись вектор-змінною:

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_e \end{bmatrix}. \text{ Враховуючи те, що } y = \bar{c}^T \bar{x},$$

отримали систему рівнянь, яка описує об'єкт у розширеному просторі станів

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \beta u, \tag{25}$$

$$\frac{dx_e}{dt} = g - \bar{c}^T \bar{x}, \tag{26}$$

Рівняння (25) і (26) об'єднаємо в одне матрично-векторне рівняння

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = A_{ex} \bar{w} + Bu + \bar{r}g, \tag{27}$$

де $A_{ex} = \begin{bmatrix} A & O_1 \\ -\bar{c}^T & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{r} = \begin{bmatrix} O_1 \\ g \end{bmatrix},$

O_1 - нульова матриця розміром $n \times 1$.

Для розширеного стану критерій оптимального керування буде таким:

$$J(\bar{w}, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\bar{w}^T Q \bar{w} + \chi u^2) dt. \tag{28}$$

де Q - симетрична напівозначена матриця, $\chi > 0$ - постійні величини.

Функція Гамільтона для критерію (28) і рівняння (27) є такою:

$$K(\bar{w}, u, \bar{\psi}) = -\frac{1}{2} (\bar{w}^T Q \bar{w} + \chi u^2) + \bar{\psi}^T (A_{ex} \bar{w} + Bu + \bar{r}g). \tag{29}$$

Максимізація функції (29) за змінною u дала такий результат:

$$-\chi u + B^T \bar{\psi} = 0.$$

Із отриманого рівняння визначили оптимальну керуючу дію

$$u = \chi^{-1} B^T \bar{\psi}.$$

Якщо взяти [17]

$$\bar{\psi} = -P \bar{w}, \tag{30}$$

то оптимальна дія u буде функцією вектор-змінної \bar{w} , тобто

$$u^* = -\chi^{-1} B^T P \bar{w}. \tag{31}$$

Із формули (31) випливає, що оптимальна керуюча дія u^* не залежить від постійної величини g . Тому в подальших викладках вона виключена із функції Гамільтона.

Знаходимо

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -P \frac{d\bar{w}}{dt} - \frac{dP}{dt} \bar{w}. \tag{32}$$

З іншої сторони

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = Q \bar{w} - A_{ex}^T \bar{\psi}. \tag{33}$$

Із системи рівнянь (32) і (33) вилучимо похідну $\bar{\psi}'$. У результаті отримаємо

$$-P \frac{d\bar{w}}{dt} - \frac{dP}{dt} \bar{w} = Q\bar{w} - A_{ex}^T \bar{\psi}. \quad (34)$$

У рівнянні (34) замінимо \bar{w}' , $\bar{\psi}$ і u їхніми значеннями, які визначені формулами (27), (30) і (31). Тоді

$$-PA_{ex} \bar{w} - A_{ex}^T P \bar{w} + \chi^{-1} P B B^T P \bar{w} - \frac{dP}{dt} \bar{w} = -Q\bar{w}. \quad (35)$$

Якщо тепер врахувати, що \bar{w} – ненульовий вектор, то рівняння (35) набуде такого вигляду:

$$\frac{dP}{dt} + PA_{ex} + A_{ex}^T P - \chi^{-1} P B B^T P + \tilde{Q} = 0. \quad (36)$$

Рівняння (38) є матричним рівнянням Ріккати. У тому випадку, коли матриця P є матрицею з постійними елементами, будемо мати алгебраїчне рівняння Ріккати [18]

$$PA_{ex} + A_{ex}^T P - \chi^{-1} P B B^T P + Q = 0. \quad (37)$$

Розв'язування рівняння (37) дає змогу визначити матрицю P і відповідно оптимальний керуючий вплив за формулою (31).

Формулу (31) запишемо у розгорнутому вигляді

$$u^* = -\chi^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} \bar{\beta}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ P_{n+1,1} & P_{n+1,2} & \dots & P_{n+1,n} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_e \end{bmatrix},$$

де $P_j = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \dots \\ P_{nj} \end{bmatrix}, j = \overline{1, n}.$

Після виконання відповідних дій над виразом, що розміщений в круглих дужках, прийшли до такого результату:

$$u^* = -\chi^{-1} \left(\begin{bmatrix} K & k_{n+1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_e \end{bmatrix},$$

де $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]; k_j = \chi^{-1} \bar{\beta}^T P_j, j = \overline{1, n}.$

Із формули (26) випливає, що

$$x_e = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau,$$

де $\varepsilon(\tau) = g - y(\tau)$ – величина неузгодженості оптимального ПІ-алгоритму керування (ПІ-регулятора).

З врахуванням значення x_e оптимальний ПІ-алгоритм керування є таким:

$$u^* = -K\bar{x} - k_{n+1} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (38)$$

Таким чином, синтезований оптимальний ПІ-регулятор для об'єкта з передавальною функцією (1) за умови, що $m < n$ має пропорційну складову у вигляді матричного коефіцієнта розміром $1 \times n$ та інтегральну складову з параметром k_{n+1} .

Для об'єкта з передавальною функцією (18) оптимальна керуюча дія u^* визначена формулою (38), в якій $K = [k_1 \ k_2]; k_1 = \chi^{-1} \bar{\beta}^T P_1, k_2 = \chi^{-1} \bar{\beta}^T P_2, k_3 = \chi^{-1} \bar{\beta}^T P_3.$ За допомогою розробленого програмного забезпечення для заданих параметрів передавальної функції (18), матриці $Q = 1,5I, I$ – одинична матриця та $\chi = 2,5$, обчислені коефіцієнти $k_j, j = \overline{1, n}.$

Матричний коефіцієнт ПІ-регулятора
 $k_1 = 2.1456e+00 \quad k_2 = 2.1077e+00$
 $k_3 = -7.745967e-01$

На рис. 4. зображена структурна схема оптимальної системи керування з ПІ-регулятором, яка створена на основі рис. 1, з додаванням інтегральної складової похибки керування.

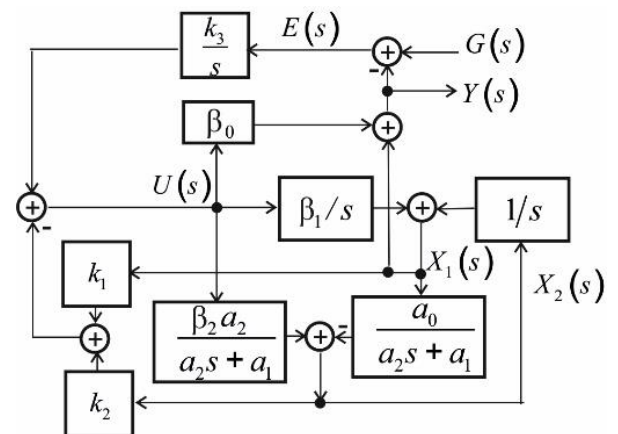


Рисунок 4 – Структурна схема системи автоматичного керування з оптимальним ПІ-регулятором

На основі створеної структурної схеми у середовищі MatLab/Simulink синтезована імітаційна модель системи (рис. 5).

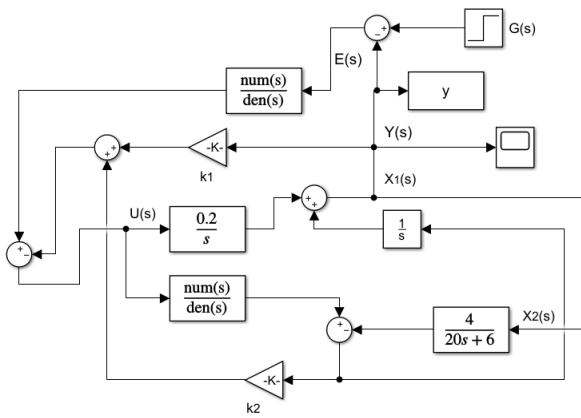


Рисунок 5 – Імітаційна модель системи автоматичного керування з оптимальним ПІ-регулятором

Практична реалізація системи автоматичного керування, структурна схема якої зображена на рис. 4, неможлива. Для оцінки стану системи використаємо модель системи у формі (2) – (4). Її призначення оцінювати змінні стану системи x_1, x_2, \dots, x_n , які є входами оптимального ПІ-регулятора (рис. 6). Сформований керуючий вплив у відповідності з формулою (38) поступає на вхід об'єкта, визначеного передавальною функцією (10). Вихідна координата об'єкта $y(t)$ подається на елемент порівняння, де формується величина неузгодженості $\varepsilon(t)$.

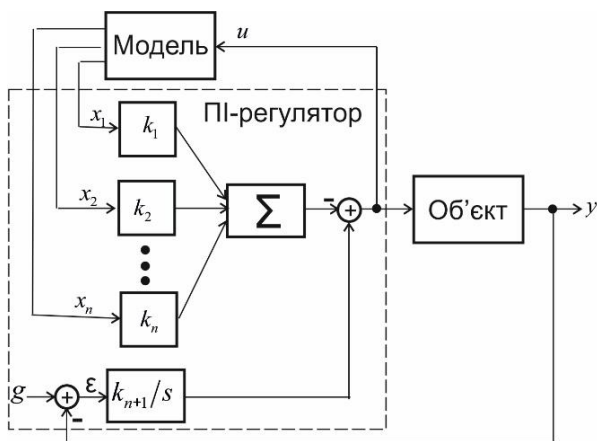


Рисунок 6 – Функціональна схема системи автоматичного керування з моделлю

Модель об'єкта зручно подати у матрично-векторній формі ($m < n$). Перетворимо систему рівнянь (19) і (20) за Лапласом при нульових початкових умовах. Тоді

$$\bar{X}(s) = (I - A(s))^{-1} B(s)u(s), \quad (39)$$

$$Y(s) = \bar{c}^T X(s), \quad (40)$$

де

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_0}{a_n s + a_{n-1}} & \frac{a_1}{a_n s + a_{n-1}} & \frac{a_2}{a_n s + a_{n-1}} & \dots & \frac{a_{n-1}}{a_n s + a_{n-1}} \end{bmatrix},$$

I - одинична матриця;

$$\bar{X}(s) = (X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s))^T -$$

вектор змінних стану об'єкта;

$$B(s) = \begin{bmatrix} \beta_1/s \\ \beta_2/s \\ \dots \\ \frac{\beta a_n}{a_n s + a_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Для об'єкта з передавальною функцією (18) створена імітаційна модель системи автоматичного керування за структурною схемою, яка зображена на рис. 6.

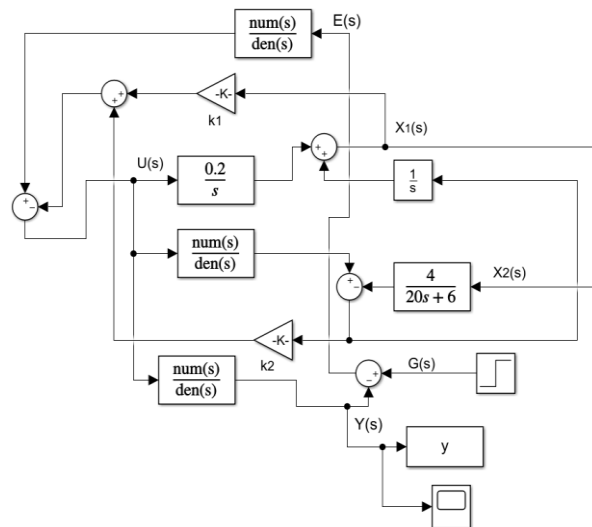


Рисунок 7 – Імітаційна модель одноконтурної системи автоматичного керування (передавальна функція об'єкта (18))

Результат імітаційного моделювання відображено на рис. 8. Синім кольором відмічена перехідна характеристика, яка отримана за імітаційною моделлю рис. 5, а червоним кольором – за імітаційною моделлю рис. 7.

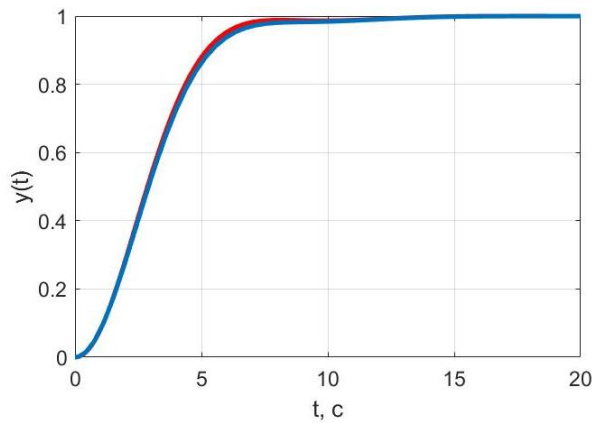


Рисунок 8 – Перехідні характеристики системи автоматичного керування з передавальною функцією об'єкта (18)

У роботі [16] розроблений метод розрахунку оптимальних параметрів налаштування ПІ-регулятора за узагальненим критерієм якості процесу керування. Об'єкт керування визначений передавальною функцією (18).

Таблиця 1 містить порівняльні результати, що відтворюють якість процесу керування за трьома способами реалізації системи автоматичного керування. Аналіз отриманих результатів показує, що оптимальний ПІ-регулятор, параметри якого обчислені за методом принципу максимуму, забезпечує дещо кращі показники якості процесу керування в порівнянні з методом s-площин. З іншої сторони, якщо класичний ПІ-регулятор має тільки два параметри налаштування, то в оптимальному ПІ-регуляторі кількість параметрів налаштування визначається порядком передавальної функції об'єкта (кількістю змінних станів об'єкта).

Безпосередньо вимірюється тільки одна координата стану об'єкта (вихідна величина) інші змінні стану можна отримати шляхом створення моделі об'єкта (39),

(40). Крім того, процедура визначення параметрів налаштування ПІ-регулятора за принципом максимуму вміщує вагові коефіцієнти Q і χ , які вибираються на основі інтуїції дослідника та проведенням цілого ряду комп'ютерних експериментів.

Висновки

1. На основі принципу максимуму синтезовані ПІ-алгоритми керування за квадратичним критерієм. Шляхом імітаційного моделювання автоматичної системи керування, яка має у своєму складі оптимальний ПІ-регулятор і керований об'єкт з передавальною функцією другого порядку, встановлено, що кількість параметрів налаштування ПІ-регулятора визначається порядком передавальної функції об'єкта, а такій системі притаманна статична похибка керування.

2. Синтезований оптимальний ПІ-регулятор за квадратичним критерієм характеризується кількістю параметрів налаштування, які на одиницю більші за порядок передавальної функції керованого об'єкта. Імітаційне моделювання системи автоматичного керування з оптимальним ПІ-регулятором підтвердило відсутність статичної похибки керування.

3. В оптимальних ПІ-регуляторах керуюча дія є функцією станів об'єкта. Оскільки одноконтурна система керування характеризується тільки одним станом (вихідною величиною), то інші стани приходиться визначати шляхом диференціювання вихідного сигналу або створення математичної моделі об'єкта, яка є доповненням до синтезованого ПІ-регулятора. Оскільки число станів визначається порядком передавальної функції, то для реалізації системи необхідно мати похідні вищих по-

Таблиця 1 – Порівняння показників якості процесу керування

	Перерегулювання, %	Час регулювання, с
Метод s-площин (узагальнений квадратичний критерій)	3,93	8,70
Оптимальний ПІ-регулятор (система без моделі)	0	5,96
Оптимальний ПІ-регулятор (система з моделлю)	$3.3586 \cdot 10^{-3}$	5,9

рядків, що створює певні труднощі при реалізації систем керування з оптимальними П/ПІ-регуляторами.

Подяки
Відсутні.

Конфлікт інтересів
Відсутній.

Список використаних джерел

1. Borase R. P., Maghad D. K., Sondkar S. Y., Pawar S. N. A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control*. 2020. URL: <https://doi.org/10.1007/s40435-020-00665-4>
2. Joseph S. B., Dada E. G., Abidemi A., Oyewola D. O., Khammas B. M. Metaheuristic algorithms for PID controller parameters tuning: review, approaches and open problems. *Heliyon*. 2022. Vol. 8, No. 6. Art. e09399. URL: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e09399>
3. Горбійчук М. І., Пістун Є. П. Числові методи і моделювання на ЕОМ : навч. посібник. Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2010. 408 с.
4. Jayachitra A., Vinodha R. Genetic algorithm based PID controller tuning approach for continuous stirred tank reactor. *Advances in Artificial Intelligence*. 2014. Vol. 2014. Art. 791230. URL: <https://doi.org/10.1155/2014/791230>
5. Cao F. PID controller optimized by genetic algorithm for direct-drive servo system. *Neural Computing and Applications*. 2020. Vol. 32. P. 23–30. URL: <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3739-z>
6. Ribeiro J. M. S., Santos M. F., Carmo M. J., Silva M. F. Comparison of PID controller tuning methods: analytical/classical techniques versus optimization algorithms. *18th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. 2017. URL: <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2017.7970458>
7. Niu B., Wang H. Bacterial colony optimization. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2012. Vol. 2012. Art. 698057. URL: <https://doi.org/10.1155/2012/698057>
8. Sagban R. H. A., Marhoon H. A., Alubady R. Hybrid bat-ant colony optimization algorithm for rule-based feature selection in health care. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*. 2020. Vol. 10, No. 6. P. 6655–6663. URL: <http://doi.org/10.11591/ijece.v10i6.pp6655-6663>
9. Shami T. M., El-saleh A. A., Alswaitti M., Al-Tashi Q., Summakieh M. A., Mirjalili S. Particle swarm optimization: a comprehensive survey. *IEEE Access*. 2022. Vol. 10. P. 10031–10061. URL: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3142859>
10. Nie Z.-Y., Li Z., Wang Q.-G., Gao Z., Luo J. A unifying Ziegler–Nichols tuning method based on active disturbance rejection. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2021. URL: <https://doi.org/10.1002/rnc.5848>
11. Bharat S., Ganguly A., Chatterjee R. et al. A review on tuning methods for PID controller. *Asian Journal of Convergence in Technology*. 2019. Vol. V, Issue I. P. 1–4.
12. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*. 1986. Vol. 22 (4). P. 397–411.
13. Гончаренко Б. М., Лобок О. П., Слезенко А. М. Огляд методів та областей аналітичного конструювання оптимальних регуляторів для стаціонарних і нестаціонарних багатовимірних об'єктів керування. *Харчова промисловість*. Київ : НУХТ, 2014. № 15. С. 149–154.
14. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern control systems. Hoboken, New Jersey : Pearson Education, Inc., 2017. 1106 p.
15. Семенцов Г. Н., Горбійчук М. І., Чеховський С. А., Жуган Л. І. Автоматизація процесів переробки нафти та газу : навч. посібник. Львів : Світ, 1992. 350 с.

16. Horbiichuk M., Vasylenchuk M., Yednak I., Lahoida A. Devising a combined method for setting PI/PID controller parameters for oil and gas facilities. *Східно-Європейський журнал підприємницьких технологій*. 2025. № 1 (2) (133). С. 85–95. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.322424>
17. Горбійчук М. І., Єднак І. С., Пилипчук Ю. В. Синтез оптимальної системи автоматичного керування процесом низькотемпературної сепарації. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2025. № 2 (69). С. 32–40. URL: <https://doi.org/10.32782/2072-2052.2025.2.69.4>
18. Astrom K. J., Wittenmark B. Computer-controlled systems. Theory and design. Prentice Hall, 1997. 569 p.

References

1. Borase, R. P., Maghad, D. K., Sondkar, S. Y., & Pawar, S. N. (2020). A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control*. <https://doi.org/10.1007/s40435-020-00665-4>
2. Joseph, S. B., Dada, E. G., Abidemi, A., Oyewola, D. O., & Khammas, B. M. (2022). Metaheuristic algorithms for PID controller parameters tuning: review, approaches and open problems. *Heliyon*, 8(6), Article e09399. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e09399>
3. Horbiichuk, M. I., & Pistun, Y. P. (2010). *Chyslovi metody i modeliuvannia na EOM: navchalnyi posibnyk* [Numerical methods and computer modeling: Educational manual]. IFNTUNG. (in Ukrainian)
4. Jayachitra, A., & Vinodha, R. (2014). Genetic algorithm based PID controller tuning approach for continuous stirred tank reactor. *Advances in Artificial Intelligence, 2014*, Article 791230. <https://doi.org/10.1155/2014/791230>
5. Cao, F. (2020). PID controller optimized by genetic algorithm for direct-drive servo system. *Neural Computing and Applications*, 32(1), 23–30. <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3739-z>
6. Ribeiro, J. M. S., Santos, M. F., Carmo, M. J., & Silva, M. F. (2017). Comparison of PID controller tuning methods: Analytical/classical techniques versus optimization algorithms. *2017 18th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 439–444. <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2017.7970458>
7. Niu, B., & Wang, H. (2012). Bacterial colony optimization. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012, Article 698057. <https://doi.org/10.1155/2012/698057>
8. Sagban, R. H. A., Marhoon, H. A., & Alubady, R. (2020). Hybrid bat-ant colony optimization algorithm for rule-based feature selection in health care. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, 10(6), 6655–6663. <http://doi.org/10.11591/ijece.v10i6.pp6655-6663>
9. Shami, T. M., El-Saleh, A. A., Alswaitti, M., Al-Tashi, Q., Summakieh, M. A., & Mirjalili, S. (2022). Particle swarm optimization: A comprehensive survey. *IEEE Access*, 10, 10031–10061. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3142859>
10. Nie, Z.-Y., Li, Z., Wang, Q.-G., Gao, Z., & Luo, J. (2021). A unifying Ziegler–Nichols tuning method based on active disturbance rejection. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(17), 5848. <https://doi.org/10.1002/rnc.5848>
11. Bharat, S., Ganguly, A., & Chatterjee, R., et al. (2019). A review on tuning methods for PID controller. *Asian Journal of Convergence in Technology*, 5(1), 1–4.
12. Petersen, I. R., & Hollot, C. V. (1986). A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 22(4), 397–411.
13. Honcharenko, B. M., Lobok, O. P., & Sliezenko, A. M. (2014). Ohliad metodiv ta oblastei analitychnoho konstruiuvannia optymalnykh rehulatoriv dlia statsionarnykh i nestatsionarnykh bahatovymirnykh obektiv keruvannia [Review of methods and fields of analytical design of optimal controllers for stationary and non-stationary multidimensional control objects]. *Kharchova Promyslovist*, (15), 149–154. (in Ukrainian)

14. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). *Modern control systems*. Pearson Education, Inc.
15. Sementsov, H. M., Horbiichuk, M. I., Chekhovskyi, S. A., & Zhuhan, L. I. (1992). *Avtomatyzatsiia protsesiv pererobky nafty ta hazu: navchalnyi posibnyk* [Automation of oil and gas processing industries: Educational manual]. Svit. (in Ukrainian)
16. Horbiichuk, M., Vasylenchuk, M., Yednak, I., & Lahoida, A. (2025). Devising a combined method for setting PI/PID controller parameters for oil and gas facilities. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(2-133), 85–95. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.322424>
17. Horbiichuk, M. I., Yednak, I. S., & Pylypchuk, Y. V. (2025). Syntez optymalnoi systemy avtomatychnoho keruvannia protsesom nyzkotemperaturnoi separatsii [Synthesis of the optimal system of automatic control of low-temperature separation process]. *Elektromekhanichni i enerhozberihaiuchi systemy*, (2-69), 32–40. <https://doi.org/10.32782/2072-2052.2025.2.69.4> (in Ukrainian)
18. Astrom, K. J., & Wittenmark, B. (1997). *Computer-controlled systems. Theory and design*. Prentice Hall.

OPTIMAL P/PI REGULATORS FOR SINGLE-CIRCUIT AUTOMATIC CONTROL SYSTEM

Gorbiychuk M. I.

Doctor of Technical Science, Professor
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0002-8586-1883>
e-mail: mi_profgorb@ukr.net

Skripka V. O.

Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv
01033, 60 Volodymyrska St., Kyiv, Ukraine
<https://orcid.org/0009-0009-9218-3740>
e-mail: skripkavlad6@knu.ua

Abstract. Currently, industrial PI/PID controllers are widely used for automatic control of technological processes in the oil and gas industry. The main problem of designing automatic control systems with PI/PID controllers is to determine the tuning parameters of such controllers, based on the stability condition and ensuring the necessary indicators of the quality of the control process. Another approach to the synthesis of P/PI controllers is based on the use of the maximum principle with a quadratic criterion of the quality of the control process. This problem is successfully solved for multidimensional systems that have the same number of inputs and outputs and the object has the property of observability. Under such conditions, the resulting optimal control algorithm is a function of the state variables of the object. When designing one-dimensional systems using the maximum principle, only one coordinate of the object (output value) is directly measured. Since for the synthesis of an optimal P/PI controller according to the maximum principle it is necessary to have such a number of ordinates of the object (state variables) as is determined by the order of the transfer function of the controlled object, the current scientific task is to determine new approaches to the design of optimal P/PI controllers for one-dimensional systems with state variables of the object. The practical significance of the work lies in the possibility of implementing the developed algorithms in modern automated control systems for technological processes of compressor stations, gas preparation plants, pumping units and other industrial facilities. This will increase the reliability of equipment operation, reduce energy consumption, reduce operating costs and ensure the stability of technological parameters in real time. The use of such systems will contribute to the digital transformation of oil and gas industry enterprises and increase the competitiveness of the industry in the conditions of modern development of industrial automation.

Keywords: one-dimensional object, model, transfer function, quality criterion, P/PI controller, Riccati equation.